Dieter Grillmayer:

Algebra und Geometrie

Vorwort

Dies ist der I. Teil einer Handreichung, die ich im Jahr 2019 für einen meiner Enkel ausgearbeitet habe, um ihm dabei behilflich zu sein, die schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (österr. Zentralmatura) zu bestehen. Sie umfasst daher auch nur ein Wissen und Können, das eine Voraussetzung für die Bewältigung der 24 Aufgaben des „Kernbereichs“ der schriftlichen Zentralmatura darstellt. (16 "Richtige" reichen für eine positive Beurteilung der ganzen Zentralmatura aus.) Dieser Lehrstoff wurde im Auftrag des BMU von einer Projektgruppe zusammengestellt, in vier Teile gegliedert und inhaltlich kurz beschrieben. Aus jedem dieser vier Teile kommen genau sechs Aufgaben zur Zentralmatura.

Zu Beginn jedes der vier Teile habe ich die von der Projektgruppe erstellten ANFORDERUNGEN aufgelistet. Wo ich in meinen Ausarbeitungen ein wenig darüber hinausgegangen bin ist das im Text vermerkt bzw. *kursiv geschrieben*. Andererseits sind Sätze und Formeln vielfach ohne Beweis angegeben.

Meine damalige Arbeit ist nicht perfekt und wäre sicher auch noch ausbaufähig. Gleichwohl hielt ich sie aber schon in dieser Form für geeignet, einem größeren Kreis von AHS-Maturanten dienen zu können, nicht zuletzt deshalb, weil ich über 150 (das sind an die 40 %) der zwischen 2014 und 2019 gestellten Maturaaufgaben hineinkopiert habe. An ihnen ist auch erkennbar, auf welches Wissen und Können ganz konkret Wert gelegt wird. Darum habe ich die Handreichung nach deren Fertigstellung auch auf meine Website www.grillmayer-dieter.at gestellt und dort mit einem Vorwort versehen, das vor allem darauf hinweist, dass es sich wirklich nur um eine Handreichung zu dem bereits genannten Zweck, aber keineswegs um eine wissenschaftliche Arbeit handelt.

Leider habe ich erst vor ein paar Wochen bemerkt, dass die einzelnen Teile der Arbeit bei entsprechender Titeleingabe z. B. über google im Internet als selbständige PDF-Dateien abgerufen werden können, also ohne das auf meiner Website stehende Vorwort, das auf die Entstehung und die zweifellos damit verbundenen Mängel hinweist. Daher statte ich nunmehr jede der vier PDF-Dateien mit diesem Vorwort aus.

Zuletzt: Alle seit 2014 gegebenen Maturaaufgaben finden sich einschließlich der Lösungen im Internet unter verschiedenen Adressen, z. B. unter www.marthago.at/zentralmatura.

Garsten, am 5. Jänner 2022

Schriftl. Zentralmatura Mathematik

Teil I:

ALGEBRA und GEOMETRIE

An Grundkompetenzen werden abgeprüft:

<u>1 Grundbegriffe der Algebra</u>

AG 1.1 Wissen über die Zahlenmengen N, Z, Q, R, C
AG 1.2 Wissen über algebraische Begriffe: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit. *<u>Das impliziert:</u> Äquivalenzumformungen, Lösungsmengen, unlösbare und allgemeingültige Gleichungen.*

Anmerkungen: Bei den Zahlenmengen soll man die Mengenbezeichnungen und die Teilmengenbeziehungen kennen, Elemente angeben sowie zuordnen können und die reellen Zahlen als Grundlage *kontinuierlicher Modelle* kennen. Imaginäre Zahlen sind nur als Beispiele für nicht reelle Zahlen von Belang. Die algebraischen Begriffe soll man anhand von einfachen Beispielen beschreiben/erklären und verständig verwenden können.

<u>2 (Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme</u>

AG 2.1 einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten
AG 2.2 lineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten
AG 2.3 quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten *(Parabeln, Nullstellen)*
AG 2.4 lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten
AG 2.5 Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometisch) deuten

Anmerkungen: Terme können auch Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Sinus etc. beinhalten. (?) Mit dem Einsatz elektronischer Hilfsmittel können auch komplexere Umformungen von Termen, Formeln und Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen durchgeführt werden. (?)

<u>3 Vektoren</u>

3.1 Vektoren als Zahlenpaare oder Zahlentripel verständig einsetzen und im Kontext deuten
3.2 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen
3.3 Definitionen der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarprodukt) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten
3.4 Geraden in R^2 durch Parameterdarstellungen und Gleichungen, in R^3 durch Parameterdarstellungen angeben und diese Darstellungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln.
3.5 Normalvektoren in R^2 aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

Anmerkungen: Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in Ebene und Raum als geom. Veranschaulichungen der algebr. Objekte interpretieren!

Geom. Deutung des Skalarprodukts nur für den Fall, dass es 0 ist! Geraden sollen in Parameterdarstellung, in R2 auch in parameterfreier Form (Gleichungen), angegeben und interpretiert werden können.

4. Trigonometrie

AG 4.1 Definitionen von Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkeligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke einsetzen
AG 4.2 Definitionen von Sinus und Cosinus für Winkel größer als 90° kennen und einsetzen können. *(Wobei?)*

Anmerkungen: Die Kontexte beschränken sich auf einfache Fälle in der Ebene und im Raum, komplexe (Vermessungs-)Aufgaben sind hier nicht gemeint; Sinus- und Cosinussatz werden dabei nicht benötigt.

Zu AG 1.1:

1. Zahlenmengen und ihre Eigenschaften

N = {1, 2, 3, ...} Menge der *natürlichen* Zahlen („vom lieben Gott")

Die Menge ist *unendlich*, d. h. sie enthält ∞ viele Elemente, und sie ist *abgeschlossen* gegenüber Addition und Multiplikation, d. h. Summe und Produkt von nat. Zahlen ergeben stets wieder eine nat. Zahl. Die Menge ist *nicht abgeschlossen* gegenüber Subtraktion und Division. Auf der *Zahlengeraden* liegen die zugehörigen Punkte *diskret*, d. h. in festen Abständen zueinander.

Z = **N** ∪ {0} ∪ {-1, -2, -3, ...} Menge der *ganzen* Zahlen, besteht aus den *positiven ganzen* Zahlen (= den nat. Zahlen), der *Null* und den *negativen ganzen* Zahlen.

Diese unendl. Menge ist nun auch gegenüber der Subtraktion abgeschlossen, Division ist nur *mit Rest* möglich, z. B. 13 : 5 = 2, Rest 3 (Probe: 2.5 + 3 = 13). Divisionen mit Rest 0 begründen die *Teilbarkeit* in Z, die *Primzahlen* und die *Faktorzerlegung*. Auf der Zahlengeraden liegen auch die ganzen Zahlen diskret.

Q = $\{q = \frac{z}{n}$ mit $z \in Z$ und $n \in N\}$ Menge der *rationalen* (= „verständlichen") Zahlen, alle Zahlen sind als *Brüche*, als *gemischte Zahlen* oder auch als *endliche* oder *periodische Dezimalzahlen* darstellbar. Die Bezeichnung **Q** weist darauf hin, dass es sich um *Quotienten* (Ergebnisse einer Division) handelt.

Diese Menge ist nun auch gegenüber der Division (mit Divisoren ≠ 0) abgeschlossen. Sie enthält **Z** als *Teilmenge*: **N** ⊂ **Z** ⊂ **Q**. (Jede ganze Zahl ist ein Quotient mit den Nenner 1.)

Zwischen je zwei rat. Zahlen q_1 und q_2 liegen ∞ viele weitere rat. Zahlen, z. B. das *arithmetische Mittel* $q_3 = ½.(q_1 + q_2)$, das arithm. Mittel q_4 aus q_1 und q_3 usw. Der Prozess lässt sich beliebig oft fortsetzen. Die rat. Zahlen füllen die Zahlengerade daher *dicht,* aber nicht lückenlos (siehe unten).

Rechnen mit rat. Zahlen: Nur die *Bruchrechnung* liefert exakte Ergebnisse, gem. Zahlen haben nur als Ergebnis (Größe des Bruchs) eine gewisse Bedeutung, ebenso Dezimalzahlen. Bei endl. Dezimalzahlen mit vielen Stellen und bei period. Dezimalzahlen kann man nur mit *Näherungswerten* rechnen und bekommt kein exaktes Ergebnis, dieses darf daher nur mit dem Ungefährzeichen (≈) geschrieben werden. Umwandlung eines Bruches in eine Dezimalzahl durch den *Divisionsalgorithmus.* Umgekehrt: Bei endl. Dezimalzahlen durch Bruchschreibweise und Kürzen, bei period. Dezimalzahlen nach folgender Regel: Im Zähler die Differenz aus VorperiodePeriode und Vorperiode, im Nenner so viele Neuner wie die Periode und so viele Nullen wie die Vorperiode Ziffern hat.

Beispiel: $2{,}2\dot{5}\dot{7} = 2 + \frac{257-2}{990} = 2 + \frac{255}{990} = 2 + \frac{17}{66} = \frac{132}{66} + \frac{17}{66} = \frac{149}{66}$, Probe durch Division.

Irrationale („unverständliche“ od. „unbegreifliche“) Zahlen: Menge **I**

Vor Entdeckung und Anwendung des *Pythagoräischen Lehrsatzes* (um 600 v. Chr.) glaubten die Griechen, alle geom. und phys. Phänomene wären durch rat. Zahlen erfassbar. Dann fielen sie aus allen Wolken. Denn die Diagonalenlänge in einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 ist $\sqrt{2}$ = 1,41421... und diese Zahl ist nicht durch einen Bruch darstellbar. (Schöner *indirekter Beweis*, in dem man die Annahme $\sqrt{2} = \frac{z}{n}$ mit teilerfremdem z und n ad absurdum führt.)

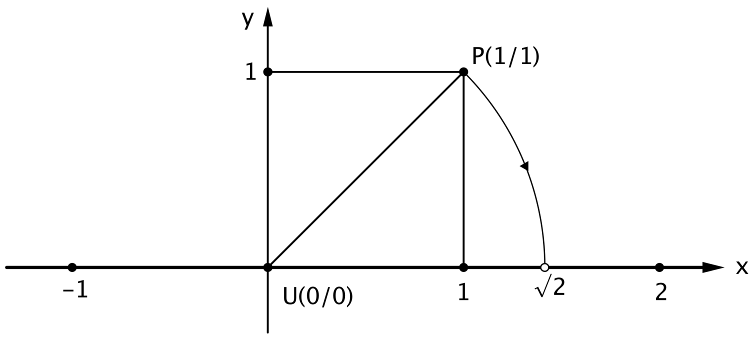
Erst viel später erkannte man, dass es neben den (nicht endlichen) Wurzeln (= *algebraische irrationale* Zahlen) auch noch andere gibt, z. B. die Kreiszahl π = 3,14159..., definiert als Verhältnis des Kreisdurchmessers d zum Kreisumfang u (d : u = 1 : π). Diese nennt man *transzendente irrationale* Zahlen. Die übliche Definition einer *irrationalen* Zahl lautet: Nicht periodische Dezimalzahl mit ∞ vielen Dezimalen.

Mit irrat. Zahlen kann man nicht exakt rechnen, sondern nur mit Näherungswerten. Der Fachmann behilft sich damit, so lange wie möglich mit den Symbolen (z. B. $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, π, $\sin\alpha$, e = 2,71828... Euler’sche Zahl) wie mit Variablen zu rechnen und erst ganz zuletzt Näherungswerte einzusetzen (bzw. das den Taschenrechner tun zu lassen) und abschließend (nochmals) zu runden.

Q $\cup$ **I** = **R**: Menge der *reellen* (= „wirklichen“) Zahlen. Diese Zahlen füllen die Zahlengerade *lückenlos* aus. Ihre Anzahl *(Mächtigkeit*) ist größer als jene der ganzen und der rationalen Zahlen, die nur *abzählbar unendlich viele* sind. R besitzt die *Mächtigkeit des Kontinuums*.

Die reellen Zahlen bilden die Grundlage aller *kontinuierlichen (oder stetigen) mathem. Modelle.*

Die folgende Zeichnung belegt, dass auf der Zahlengeraden für die irrat. Zahlen noch Platz sein muss:



R ist (wie schon **Q**) gegenüber den vier Grundrechnungsarten abgeschlossen, nicht aber hinsichtlich des Wurzelziehens, weil sich aus negativen Zahlen keine reellen Wurzeln ziehen lassen. Das hat zur „Erfindung“ der *imaginären* („bildhaften“) Zahlen geführt. Diese bilden zusammen mit den reellen Zahlen die Menge der *komplexen* Zahlen **C.**

C = {c = a + i.b mit a$\in$R und b$\in$R} i heißt *imaginäre Einheit* und ist definiert durch $i^2 = -1$

C ist auch hinsichtlich des Wurzelziehens abgeschlossen, z. B. $\sqrt{-4} = \sqrt{4i^2} = 2i$. Außerdem gilt in **C** der *Fundamentalsatz der Algebra*: Eine Polynomgleichung n-ten Grades $x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0 = 0$ hat genau n Lösungen.

Für b = 0 ist die komplexe Zahl eine reelle Zahl. Imaginäre Zahlen haben auf der Zahlengeraden keinen Platz mehr; sie werden geometrisch als Punkte mit den Koordinaten x = a und y = b in einem Koordinatensystem Uxy dargestellt. Der Punkt P in der obigen Zeichnung steht für die komplexe Zahl 1 + i.

Struktur der Zahlenmengen: $C \supset R \supset Q \supset Z \supset N$, $Q \cup I = R$, $R \cap Q = Q$ usw.

Mat.16/HT/Aufg.1/1: Rationale Zahlen
Die Menge M = {x ∈ Q / 2 < x < 5} ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen. Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

4,99 ist die größte Zahl, die zur Menge M gehört	
Es gibt in M unendlich viele Zahlen, die kleiner als 2,1 sind	
Jede reelle Zahl, die größer als 2 und kleiner als 5 ist, ist in M enthalten	
Alle Elemente von M lassen sich als Brüche a/b mit a ∈ **Z** und b ∈ **N** darstellen	
M enthält keine Zahlen aus der Menge **C** (komplexe Zahlen)	

Mat.17/HT/Aufg. 1/1: Ganze Zahlen
Es sei *a* eine positive ganze Zahl. Aufgabenstellung: Welche der nachstehenden Ausdrücke ergeben für $a \in \mathbf{Z}^+$ stets eine ganze Zahl? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Ausdrücke an!

a^{-1}	a^2	$a^{1/2}$	3a	a/2

Mat. 18/1. NT/Aufg. 1/1: Zahlenmengen
Nachstehend sind Aussagen über Zahlen aus den Mengen **Z, Q, R** und **C** angeführt. Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Irrationale Zahlen lassen sich in der Form a/b mit a ∈ **Z** und b ∈ **N** darstellen	
Jede rationale Zahl kann als endliche oder periodischer Dezimalzahl geschrieben werden	
Jede Bruchzahl ist eine komplexe Zahl	
Die Menge **Q** besteht ausschließlich aus positiven Bruchzahlen	
Jede reelle Zahl ist auch eine rationale Zahl	

Mat. 18/2.NT/Aufg. 1/1: Zahlen und Zahlenmengen
Nachstehend sind Aussagen über Zahlen und Zahlenmengen angeführt. Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es gibt mindestens eine Zahl, die in **N** enthalten ist aber nicht in **Z**	
$-\sqrt{9}$ ist eine irrationale Zahl	
Die Zahl 3 ist ein Element der Menge **Q**	
$\sqrt{-2}$ ist in **C** enthalten, aber nicht in **R**	
Die Zahl 1,5 periodisch ist in **R** enthalten, aber nicht in **Q**	

Zu AG 1.2 und AG 2.1

2. Algebraische Grundbegriffe

Variable: Durch einen Buchstaben symbolisierte Zahl, die verschiedene Werte annehmen kann. Allenfalls müssen diese einer gegebenen Definitionsmenge D angehören. (I. A. gilt D = **R.**)
Term: Mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen und/oder Variablen und/oder Rechenzeichen, aber ohne Gleichheits- oder Ungleichheitszeichen (=, >, <, ≥, ≤), besteht.
Termumformungen: Veränderungen an Termen im Rahmen algebraischer Rechengesetze, z. B. Ausmultiplizieren von Klammern oder das Gegenteil (Herausheben gemeinsamer Faktoren).

Äquivalente Terme: Terme, die denselben algebr. Zusammenhang ausdrücken bzw. die beim Ersetzen der Variablen durch Zahlen denselben Wert ergeben.

Gleichung, Ungleichung: Zwei Terme, die durch das Gleichheitszeichen oder ein Ungleichzeichen miteinander verbunden sind. Wir unterscheiden **Bestimmungsgleichungen** (mit Unbekannten x, y, ..., die es zu bestimmen gilt, im Unterschied zu Parametern a, b, ...), **Funktionsgleichungen** y = T(x), die einen Funktionszusammenhang herstellen, und **Formeln**, der einen allgemein gültigen Zusammenhang beschreiben

Gleichungssysteme: Mehrere Gleichungen mit (i. A.) mehreren Unbekannten.

Lösungen: Zahlenwerte, welche, anstelle der Unbekannten eingesetzt, aus einer Bestimmungsgleichung oder Ungleichung eine wahre Aussage machen. Bei mehreren Unbekannten bestehen die Lösungen aus **Vektoren**, insbes. **Zahlenpaaren** bei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Wird z. B. eine Funktionsgleichung als Bestimmungsgleichung betrachtet, so bilden zusammengehörige Wertepaare (Stelle x, Funktionswert y) deren Lösungen.

Lösungsmenge: Zusammenfassung aller Lösungen einer Gleichung oder Ungleichung in einer Mengenklammer, z. B. L = {5} oder $L = \{r \in \mathbf{R} / r > 4\}$ oder L = {(2, -1)}, etwa als Lösungsmenge eines Systems von zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen. Bei unlösbaren Gleichungen ist die Lösungsmenge leer, L = {}.

Äquivalente Bestimmungsgleichungen bzw. Ungleichungen sind solche, welche dieselbe Lösungsmenge besitzen. Entsprechende Umformungen heißen Äquivalenzumformungen.

Mat. 18/HT/Aufg. 1/1: Zusammenhang zweier Variablen

Für $a, b \in \mathbf{R}$ gilt der Zusammenhang $a \cdot b = 1$. Aufgabenstellung: Zwei der fünf nachstehende Aussagen treffen in jedem Fall zu. Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Wenn a kleiner als null ist, dann ist auch b kleiner als null.	
Die Vorzeichen von a und b können unterschiedlich sein.	
Für jedes $n \in \mathbf{N}$ gilt: $(a - n) \cdot (b + n) = 1$.	
Für jedes $n \in \mathbf{N} \backslash \{0\}$ gilt: $(a \cdot n) \cdot \left(\frac{b}{n}\right) = 1$.	
Es gilt: $a \neq b$.	

Mat. 18/2.NT/Aufg. 2/1; Darstellung von Zusammenhängen durch Gleichungen

Viele Zusammenhänge können in der Mathematik durch Gleichungen ausgedrückt werden. Aufgabenstellung: Ordnen Sie den vier Beschreibungen eines möglichen Zusammenhangs zweie Zahlen a und b, beide aus $\mathbf{R}^+$, jeweils die entsprechende Gleichung aus A bis F zu:

a ist halb so groß wie b	
b ist 2% von a	
a ist um 2% größer als b	
b ist um 2% kleiner als a	

A	2.a = b
B	2.b = a
C	a = 1,02.b
D	b = 0,02.a
E	1,2.b = a
F	b = 0,98.a

Mat.16/HT/Aufg. 3/1: Treibstoffkosten:

Der durchschnittliche Treibstoffverbrauch eines PKW beträgt y Liter pro 100 km Fahrstrecke. Die Kosten für den Treibstoff betragen a Euro pro Liter. Aufgabenstellung: Geben Sie einen Term T(a, x, y) an, der die durchschnittlichen Treibstoffkosten K (in Euro) für eine Fahrtstrecke von x km beschreibt.

Anmerkung: Alle hier angegebenen Maturaaufgaben (außer den Multiple-Choice-Formaten) sollten unter Angabe der Herkunft in einem Heft bearbeitet werden!

Mat. 18/HT/Aufg. 2/1: Solaranlagen
Eine Gemeinde unterstützt den Neubau von Solaranlagen in *h* Haushalten mit jeweils *p* % der Anschaffungskosten, wobei das arithmetische Mittel der Anschaffungskosten für eine Solaranlage für einen Haushalt in dieser Gemeinde *e* Euro beträgt. Aufgabenstellung: Interpretieren Sie den Term $h.e.\frac{p}{100}$ im angegebenen Kontext!

Zu AG 1.2, AG 2.2 und AG 2.3

3. Bestimmungsgleichungen mit einer oder zwei Unbekannten

1. Allgemeine Regeln:

Die Gleichungen werden mit dem Ziel umgeformt, zu möglichst einfachen lösungsäquivalenten Gleichungen zu gelangen, aus denen die Lösungen leicht abgelesen werden können.

Äquivalenzumformungen: Die Lösungsmenge einer Bestimmungsgleichung ändert sich nicht, wenn man

1. jede Seite für sich nach den Regeln der Algebra umformt
2. auf beiden Seiten denselben Term, insbes. dieselbe Zahl, addiert oder subtrahiert
3. beide Seiten mit derselben Zahl ungleich 0 multipliziert bzw. durch dieselbe Zahl dividiert

Beispiel 1: $(x+2)^2 = x^2 + x - 5 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + x - 5$ Addition von $-x^2 - x$ auf beiden Seiten ergibt $3x + 4 = -5$ oder $3x = -9$ und Division durch 3 auf beiden Seiten schließlich $x = -3$
Probe: $(-1)^2 = 9 - 3 - 5 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow L = \{ -3 \}$

Erweiterung der Lösungsmenge durch Quadrieren auf beiden Seiten oder Multipliktion beider Seiten mit einem Term. Durch die „Probe" sind überzählige Lösungen auszuschließen. Bruchgleichungen: Beim Multiplizieren beider Seiten mit dem gemeinsamen Nenner müssen die Nullstellen des Nenners als Lösungen ausgeschlossen werden. Dividieren durch einen Term ist verboten, denn da können Lösungen verloren gehen, siehe Maturaaufg. 2/1 aus HT 2016.

Beispiel 2: $x = 3$ hat nur die Lösung 3, $x^2 = 9$ aber hat die Lösungen +3 und -3. Multiplikation mit $x + 1$: $x.(x + 1) = 3.(x + 1)$ führt zu $x.(x + 1) -3.(x + 1) = 0 \Rightarrow (x - 3).(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$.

Beispiel 3: $\frac{1}{x} = \frac{x}{2x-1} \Rightarrow D = \mathbf{R}$ ohne $\{0, \frac{1}{2}\} \Rightarrow 2x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow L = \{1\}$, die Probe stimmt. „Im Sinne der algebraischen Wurzelzählung" ist das eine Doppellösung wegen $(x - 1).(x - 1) = 0$.

Allgemeingültige oder unlösbare Gleichungen: Führen Äquivalenzumformungen zu einer generell richtigen Aussage, so sind sie allgemeingültige Gleichungen mit L = D (bzw. **R**), führen sie zu einer generellen Falschaussage, so sind sie unlösbar mit L = { }.

Beispiel 4: $x.(3 - x^2) + 2x = x.(5 - x^2) \Rightarrow 3x - x^3 + 2x = 5x - x^3 \Rightarrow 5x = 5x$ oder $0 = 0 \Rightarrow L = \mathbf{R}$

Beispiel 5: $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 7 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = x^2 - 10x + 7 \Rightarrow 25 = 7 \Rightarrow L = \{\}$

2. Lineare Gleichungen in einer Variablen:

Dazu darf man, siehe die obigen Beispiele 1, 4 und 5, auch Gleichungen zählen, wo bei Äquivalenzumformungen alle Quadrate und höheren Potenzen von x wegfallen. Lineare Gleichungen in einer Variablen haben daher immer genau eine Lösung oder sie sind allgemeingültig oder unlösbar (Beispiele 4, 5). Anwendung finden lineare Gleichungen in einer Variablen x vor allem bei vielerlei Textfaufgaben.

Beispiel 6: Das Dreifache einer Zahl x ist genau so groß wie die um 12 erhöhte Hälfte dieser Zahl.

$3x = x/2 + 10 \Rightarrow 6x = x + 20 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$; Es handelt sich um die Zahl 4.

Zu den einfachsten Anwendungen gehört auch die Berechnung der Nullstelle einer linearen Funktion mit der Gleichung $y = kx + d$ aus der Gleichung $0 = kx + d$. Sie genügt der Formel $x_1 = -d/k$.

3. Lineare Gleichungen in zwei Variablen:

... können stets auf die allgemeine Form $ax + by + c = 0$ gebracht und für $b \neq 0$ in eine Funktionsgleichung $y = kx + d$ umgewandelt werden. Lineare Gleichungen in zwei Variablen besitzen unendlich viele Zahlenpaare als Lösungen und jeder Lösung entspricht genau ein Punkt auf einer Geraden. Daher: Jede lineare Gleichung in zwei Variablen x, y ist eine Geradengleichung. (In der Form $y = kx + d$ ist $k = \tan(\varphi)$ die Steigung der Geraden und Y(0/d) ist ihr Schnittpunkt mit der y-Achse.)

Die allgem. Darstellung der Lösungsmenge ergibt sich aus der Parameterdarstellung der zugehörigen Geraden und wird dort (im Kapitel Vektoren) behandelt.

Beispiel 7: $3.(x + 2y) = 8y - x + 6 \Rightarrow 3x + 6y = 8y - x + 6 \Rightarrow 4x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = 2x - 3$. Jedes $x \in \mathbf{R}$ bildet mit dem zugehörigen y genau eine Lösung der Gleichung, also (0, -3), (1, -1), (2, 1), (-1, -5), (1/2, -2) usw. und je zwei Punkte mit diesen Koordinaten legen die zugehörige Gerade fest.

4. Quadratische Gleichungen in einer Variablen:

... können stets auf die allgemeine Form $x^2 + px + q = 0$ gebracht und ihre Lösungen nach der Formel $x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ berechnet werden. Für eine quadr. Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ (mit $a \neq 1$) ist $p = b/a$ und $q = c/a$, woraus sich aus $x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ die Formel $x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ergibt. Wegen der immer möglichen Division der allg. Gleichung durch a wird diese Formel aber nicht benötigt.

Sind die Lösungen x_1 und x_2 bekannt, so ergibt die Gleichung $(x - x_1).(x - x_2) = 0$ „ausmultipliziert“ wieder $x^2 + px + q = 0$. **In dieser Allgemeinheit gilt das aber nur für die Definitionsmenge D = C (komplexe Zahlen).**

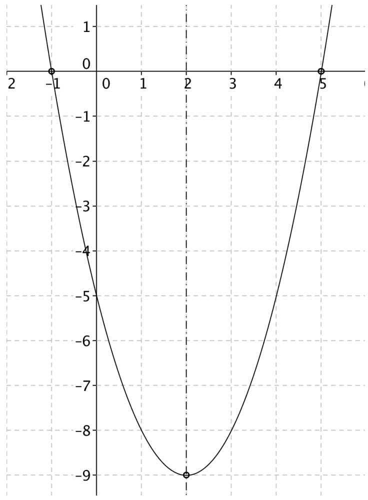
Beispiel 8: $x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x_{12} = 1 \pm\sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{4i^2} = 1 \pm 2.i \Rightarrow [x - (1 + 2.i)].[x - (1 - 2.i)] = 0 \Rightarrow x^2 - x.(1 - 2i) - x.(1 + 2i) + (1 + 2i).(1 - 2i) = x^2 - x + x.2i - x - x.2i + 1 - 2i + 2i - 4i^2 = x^2 - 2x + 5 = 0$

In der Definitionsmenge D = **R** wird die Anzahl der Lösungen durch das Vorzeichen der unter dem Wurzelzeichen stehenden Zahl (der sogenannten Diskriminante) bestimmt. Ist diese kleiner als 0, so gibt es keine (reelle) Lösung, ist sie gleich Null, dann gibt es genau eine, die wegen $(x - x_1)^2 = (x - x_1).(x - x_1) = 0$ als Doppellösung bezeichnet wird, und für jede positive Diskriminante gibt es zwei verschiedenen reelle Lösungen.

Zu den wichtigsten Anwendungen gehört die Berechnung der Nullstellen einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$, deren Funktionskurve eine Parabel mit einer zur y-Achse parallelen Symmetrieachse ist, die für $a > 0$ nach oben und für $a < 0$ nach unten offen ist.

Beispiel 9: $f(x) = x^2 - 4x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_{12} = 2 \pm\sqrt{4+5}$
$\Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -1$

Daraus ergibt sich mit $x_3 = ½.(x_1 + x_2) = 2$ die x-Koordinate des Scheitels und mit $f(2) = -9$ auch seine y-Koordinate: T(2/-9).



Nebenbei: Quadratische Gleichungen mit ganzzahligem p, q lassen sich auch durch „Aufspalten des quadratischen Ausdrucks" lösen, indem q das Produkt der beiden Lösungen und p die negative Summe sein muss, in unserem Fall also $x_1.x_2 = -5$, was nur mit 5, -1 oder mit -5, 1 möglich ist; ersteres ergibt als $- p = 4$, also $p = -4$. Probe: $(x - 5).(x + 1) = x^2 - 4x - 5 = 0$.

Bei Doppellösung: Der Parabelscheitel liegt auf der x-Achse!

Mat. 16/HT/Aufg. 2/1: Äquivalenzumformungen

Nicht jede Umformung einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung. Aufgabenstellung: Erklären Sie konkret auf das unten angegebene Beispiel bezogen, warum es sich bei der durchgeführten Umformung um keine Äquivalenzumformung handelt. Die Grundmenge ist die Menge **R**.

$$x^2 - 5x = 0 \;/{:}\; x \Rightarrow x - 5 = 0$$

Mat. 16/HT/Aufg. 4/1: Quadratische Gleichung

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + p.x - 12 = 0$. Aufgabenstellung: Bestimmen Sie denjenigen Wert für p, für den die Gleichung die Lösungsmenge L = {-2, 6} besitzt.

Mat. 18/HT/Aufg. 3/1: Lösungsfälle quadratischer Gleichungen

Gegeben ist eine quadratische Gleichung der Form $r \cdot x^2 + s \cdot x + t = 0$ in der Variablen x mit den Koeffizienten $r, s, t \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Die Anzahl der reellen Lösungen der Gleichung hängt von r, s und t ab. Aufgabenstellung: Geben Sie die Anzahl der reellen Lösungen der gegebenen Gleichung an, wenn r und t verschiedene Vorzeichen haben, und begründen Sie Ihre Antwort allgemein!

Mat. 18/1. NT/Aufg. 2/1: Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung

Gegeben ist eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + a.x = 0$ mit $a \in$ **R.** Aufgabenstellung: Bestimmen Sie denjenigen Wert für a, für den die gegebene Gleichung die Lösungsmenge L ={0, 6/7} hat.

Zu AG 2.4

4. Lineare Ungleichungen

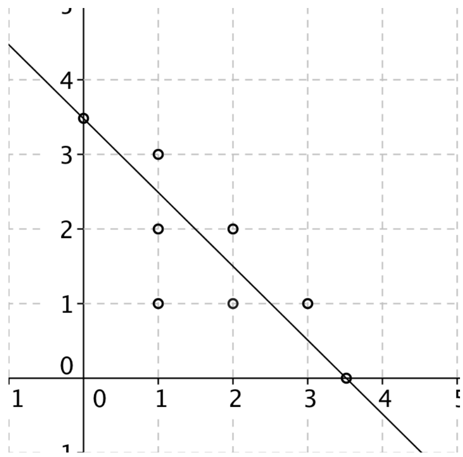
Äquivalenzumformungen wie bei Gleichungen mit Ausnahme der Multiplikation (Division) mit negativen Zahlen; hier ist das Ungleichheitszeichen zu ändern!

Beispiel 1: Ab welcher natürlichen Zahl n ist das Viereinhalbfache größer als 40?

$9/2.n > 40 \Rightarrow 9n > 80 \Rightarrow n > 8{,}8$ periodisch $\Rightarrow L = \{9, 10, 11, 12 \,.\, ...\} = \{n \in \mathbf{N} / n > 8\}$ Geometrische Deutung: Alle „ganzzahligen“ Punkte auf der Zahlengeraden rechts von 8.

Lineare Ungleichungen in zwei Variablen: Man formt die geg. Ungleichung auf $T(x, y) > 0$ oder $T(x,y) < 0$ um und zeichnet die Gerade mit $T(x, y) = 0$. Diese teilt die Ebene in zwei Halbebenen, wovon eine die Punkte enthält, deren Koordinaten die Lösungen sind. Für ein Ungleich-oder-Gleich-Zeichen kommen noch die Koordinaten der Punkte auf der Geraden dazu.

Beispiel 2: $5x - 7 < 3x - 2y \Rightarrow 2x + 2y - 7 < 0 \Rightarrow X(3{,}5/0)$, $Y(0/3{,}5) \Rightarrow$ Die Koordinaten aller Punkte, die in der Halbebene des Ursprungs U(0/0) liegen, sind Lösungen, z. B. (1, 1), (2, 1) und (1, 2), aber nicht mehr (3, 1), (2, 2) und (1, 3), siehe nebenstehende Figur.



Mat. 18/1. NT/Aufg. 2/1: Erdgasanbieter
Ein Haushalt schwankt beim Wechsel des Erdgasanbieters zwischen A und B. Der Energiegehalt des Erdgases wird in Kilowattstunden (kWh) gemessen. Anbieter A verrechnet jährlich eine fixe Gebühr von 340 Euro und 2,9 Cent pro kWh. Anbieter B verrechnet jährlich eine fixe Gebühr von 400 Euro und 2,5 Cent pro kWh.
Die Ungleichung $0{,}025.x + 400 < 0{,}029.x + 340$ dient dem Vergleich der zu erwartenden Kosten bei beiden Anbietern. Aufgabenstellung: Lösen Sie die Ungleichung und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext.

Zu AG 2.5

5. Gleichungssysteme

Es gibt drei Methoden, die Substitutionsmethode, die Additionsmethode und gegebenenfalls auch die Gleichsetzungsmethode, um aus den zwei Gleichungen eine Gleichung in nur mehr einer Unbekannten zu bekommen. Diese wird berechnet und „rückeingesetzt“.

Zwei lineare Gleichungen:

Beispiel: $x - 2y - 3 = 0$ und $2x + 3y + 1 = 0$. Substitution: Einsetzen von $x = 2y + 3$ in die 2. Gleichung ergibt $4y + 6 + 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$, und aus $x = 2y + 3$ folgt $x = 1 \Rightarrow L = \{(1, -1)\}$
Bei der Additionsmethoden wird die erste Gleichung mit (-2) multipliziert und $-2x + 4y + 6 = 0$ zur zweiten Gleichung addiert $\Rightarrow 7y + 7 = 0 \Rightarrow y = -1, x = 1$.

Geometrische Deutung: S(1/-1) ist der Schnittpunkt der beiden zugehörigen Geraden. Sind diese identisch, dann sind die zwei gegebenen Gleichungen lösungsäquivalent und hinsichtlich der zugehörigen Funktionsgleichungen sogar identisch und umgekehrt. Sind die Geraden parallel, dann führt die Rechnung zu einer falschen Aussage und umgekehrt, die Lösungsmenge ist leer, die beiden Funktionsgleichungen unterscheiden sich nur hinsichtlich des d. (Die Steigungen sind gleich.)

Mat. 17/HT/Aufg. 3/1: Futtermittel
Ein Bauer hat zwei Sorten von Fertigfutter für die Rindermast gekauft. Fertigfutter *A* hat einen Proteinanteil von 14 %, während Fertigfutter *B* einen Proteinanteil von 35 % hat. Der Bauer möchte für

seine Jungstiere 100 kg einer Mischung dieser beiden Fertigfutter-Sorten mit einem Proteinanteil von 18 % herstellen. Es sollen *a* kg der Sorte *A* mit *b* kg der Sorte *B* gemischt werden. Aufgaben - stellung: Geben Sie zwei Gleichungen in den Variablen *a* und *b* an, mithilfe derer die für diese Mischung benötigten Mengen berechnet werden können! *(a = 1700/21, b = 400/21)*

Mat. 18/2. NT/Aufg. 3/1: Gleichungssystem
Gegeben ist ein Gleichungssystem aus zwei linearen Gleichungen in den Variablen x, y $\in$ **R.**
(1) a.x + y = -2 mit a $\in$ **R,** (2) 3.x + b.y = 6 mit b $\in$ **R.** Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Mat. 18/1. NT/Aufg. 7: Graphisches Lösen einer quadratischen Gleichung
Gegeben ist die quadr. Gleichung $x^2 + x - 2 = 0$. Man kann diese Gleichung mithilfe der Graphen zweier Funktionen f und g lösen, indem man die Gleichung f(x) = g(x) betrachtet. (???). Der Graph von f mit der Gleichung $y = x^2$ ist gegeben. Aufgabenstellung: Zeichnen Sie den Graphen von g ein.

Die Aufgabe mag als Beispiel für die Auflösung eines Systems mit einer linearen und einer quadratischen Gleichung dienen und wird daher hier behandelt. Sie erscheint mir allerdings konfus, allein schon deshalb, weil als Grundmenge **Z** angegeben ist, der gegebene Graph daher gar keine durchgehende Parabel sein dürfte, aber als solche vorgezeichnet ist. Ich kann mir als Lösung nur vorstellen, dass nach Umformung der Gleichung in $x^2 = - x + 2$ diese als Ergebnis der Gleichsetzung von $y = x^2$ und $y = - x + 2$ interpretiert wird und damit als Lösungen die x-Werte der beiden Schnittpunkte A(-2/4) und B(1/1) der Parabel mit der Geraden g: y = - x + 2 ergibt. Der einzuzeichnende Graph von g wäre demnach die zur 2. Mediane parallele Gerade durch den Punkt Y(0/2). So steht das als Lösung auch im Internet!

Zu AG 3.1, AG 3.2, AG 3.3 und AG 3.5

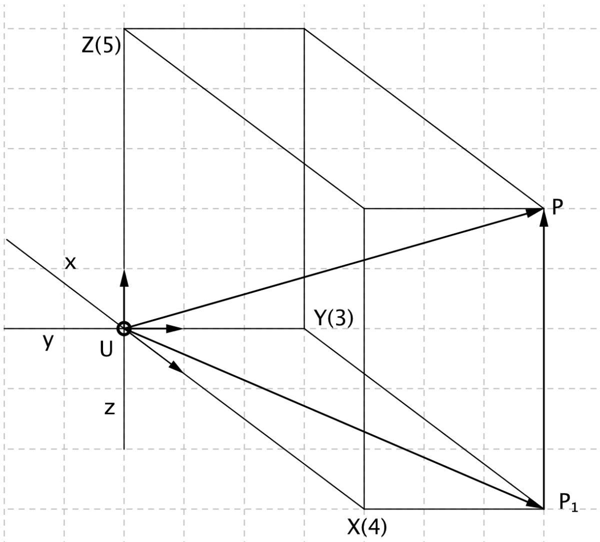
6. Zwei- und dreidimensionaleVektoren

Ein Vektor ist zunächst jedes geordnete Zahlenpaar, Zahlentripel, allgem. Zahlentupel, das als Spalte oder als Zeile (mit Beistrichen dazwischen) geschrieben werden kann. Das folgende Muster zeigt ein Zahlentripel:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = (v_x, v_y, v_z)$$

Die einzelnen Zahlen heißen Koordinaten des Vektors. Ein Vektor beschreibt eine gerichtete Größe, was für zwei- und dreidimensionale Vektoren auch geometrisch durch Pfeile veranschaulicht werden kann.

Nebenstehende Figur veranschaulicht wesentliche Zusammenhänge in einem dreidimensionalen, mit einem Koordinatensystem Uxyz ausgestatteten Raum. Die bei U ansetzenden Pfeile haben die Länge 1 und bestimmen so die Maßstäbe auf den Achsen und damit die Koordinaten des Punktes P(4/3/5). Das ist der U gegenüberliegende Punkt des Koordinatenquaders mit den Kantenlängen x = 4, y = 3 und z = 5.



Weitere Begriffe und Zusammenhänge, die sich auf die Figur von Seite 10 beziehen:

Der Vektor $\overrightarrow{UP} = \vec{p} = (4, 3, 5)$ ist der zu P gehörige Ortsvektor, eigentlich Ortspfeil, **weil ein Vektor** grundsätzlich vom Anfangspunkt und Endpunkt unabhängig, **allein durch seine drei Koordinaten definiert ist, geometrisch nur durch Länge und Richtung. D. h. alle gleich langen, parallelen und gleich gerichteten Pfeile bestimmen denselben Vektor.**

Die Länge eines Vektors: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ nach dem Pythagoräischen Lehrsatz.
Vektor $\overrightarrow{UP}$ hat daher die Länge $\sqrt{50} = 5.\sqrt{2}$

Die drei von U ausgehenden Pfeile symbolisieren die Vektoren (1, 0, 0), (0, 1, 0) und (0, 0, 1) und haben jeweils die Länge 1. Solche Vektoren nennt man Einheitsvektoren. Die zu den Punkten X, Y und Z hinführenden Ortsvektoren lauten in Zeilenschreibweise (4, 0, 0), (0, 3, 0) und (0, 0, 5) und haben die Längen 4, 3 und 5. Ein Vektor, dessen Koordinaten lauter Nullen sind, heißt Nullvektor.

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar a ∈ R (S-Multiplikation): $a.\vec{v} = a.\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.v_x \\ a.v_y \\ a.v_z \end{pmatrix}$

Für a = -1: Vektor $-\vec{v} = (-v_x, -v_y, -v_z)$ parallel zu $\vec{v}$ mit gleicher Länge, aber Gegenrichtung.
Die oben genannten drei Ortsvektoren sind das 4-fache, 3-fache bzw. 5-fache der zugehörigen Einheitsvektoren mit der Länge a: $\overrightarrow{UX} = 4.(1,0,0), \overrightarrow{UY} = 3.(0,1,0)$ und $\overrightarrow{UZ} = 5.(0,0,1)$.

Vektoraddition:

Rechnung:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix}$$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

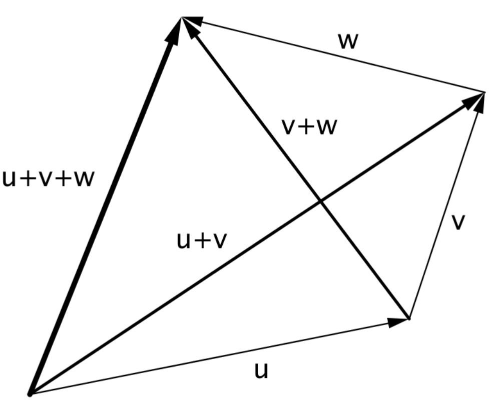
Das ist der Differenzvektor

Die Zeichnung bestätigt auch, dass das Assoziativgesetz der Addition gilt:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Zeichnung (ohne Pfeile):

Der Summenvektor verläuft vom Anfangspunkt des ersten Summanden bis zum Endpunkt (= der Spitze) des zweiten Summenden.



Figur von Seite10: $\overrightarrow{UP} = \overrightarrow{UX} + \overrightarrow{UY} + \overrightarrow{UZ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{UX}, \overrightarrow{UY}$ und $\overrightarrow{UZ}$ heißen Komponenten des Vektors $\overrightarrow{UP}$. In der ebenen Geometrie, d.h. in der xy-Ebenen können wir schreiben $\overrightarrow{UP_1} = \overrightarrow{UX} + \overrightarrow{UY} = (4,0) + (0,3) = (4,3)$. Als Verktor der dreidimensionalen Geometrie ist $\overrightarrow{UP_1} = (4, 3, 0)$ und $\overrightarrow{UP} = \overrightarrow{UP_1} + \overrightarrow{UZ} = (4, 3, 0) + (0, 0, 5) = (4, 3, 5)$.

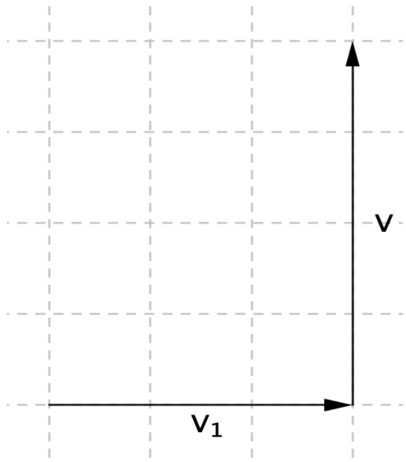
Skalarprodukt und Normalvektoren: $\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = u_x . v_x + u_y . v_y = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\varphi)$

<u>In Worten:</u> **Das Skalarprodukt zweier Verktoren (jedweder Dimension) ist die Summe der Produkte gleichnamiger Koordinaten. Für zwei- und dreidimensionale Vektoren ist diese mit dem Produkt der Beträge (= Längen) und dem Cosinus des von den zwei Pfeilen eingeschlossenen Winkels identisch** (ohne Beweis).

<u>Zwei- und dreidimensionale Normalvektoren:</u> **Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren, von denen keiner der Nullvektor ist, gleich Null, so stehen die beiden Vektoren aufeinander normal, und umgekehrt.** (<u>Beweis:</u> cos(90°) = 0.)

<u>Zweidimensionale Normalvektoren:</u>
Alle Normalvektoren zu $\vec{v} = (v_x, v_y)$ haben die Gestalt $\vec{n} = a.(v_y, -v_x)$ für jede reelle Zahl a ≠ 0. <u>Beweis:</u> $\vec{v}.\vec{n} = (a.v_x.v_y - a.v_x.v_y)$

Mat. 16/HT/Aufg. 5/1: Vektoraddition
Die nebenstehende Abbildung zeigt zwei Vektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\vec{v}$. Aufgabenstellung: Ergänzen Sie in der Abbildung einen Vektor $\overrightarrow{v_2}$ so, dass $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \vec{v}$ ist!



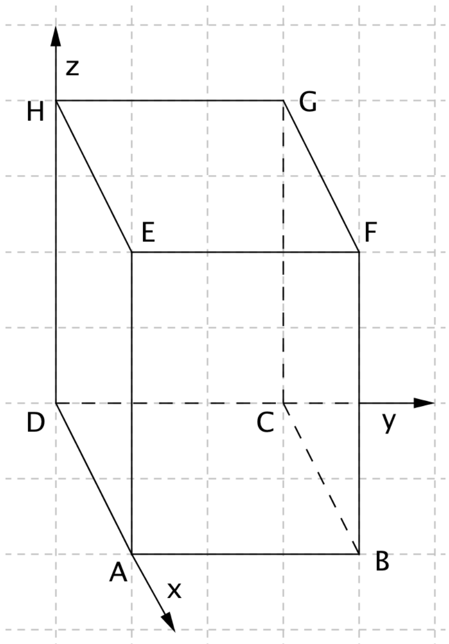
Mat. 18/2. NT/Aufg. 5/1: Normalvektoren
Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = (13, 5)$ und $\vec{b} = (10m, n)$ mit reellem m ≠ 0 und n ≠ 0. Aufgabenstellung: Diese beiden Vektoren sollen normal aufeinander stehen. Geben Sie für diesen Fall n in Abhängigkeit von m an.

Mat. 17/HT/Aufg. 4/1: Quader mit quadratischer Grundfläche. Die Abbildung (Seite 13) zeigt einen Quader, dessen quadratische Grundfläche in der *xy*-Ebene liegt. Die Länge einer Grundkante beträgt 3 Längeneinheiten, die Körperhöhe beträgt 4 Längeneinheiten. Aufgabenstellung: Geben Sie die Koordinaten (Komponenten) des Vektors $\overrightarrow{HB}$ an!

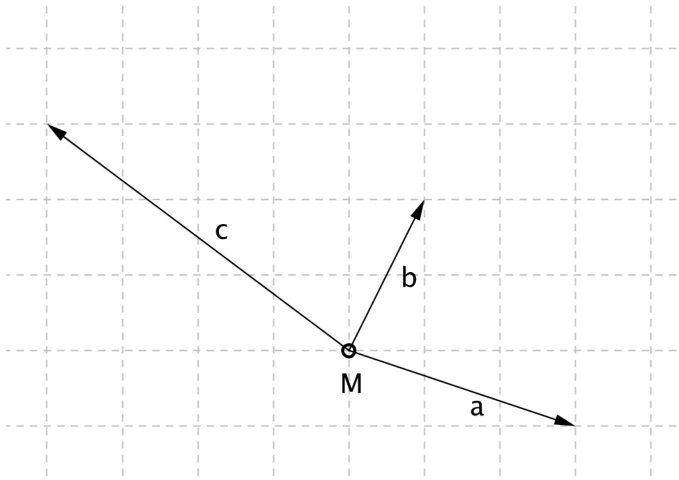
<u>Anleitung:</u> Zeichne den zu $\overrightarrow{HB}$ gehörigen Ortspfeil $\overrightarrow{UB_1}$ ein und ermittle die Koordinaten von B_1.
Leite daraus die **Regel „Spitze minus Schaft"** ab: **Jeder Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ist die Differenz aus dem <u>Ortsvektor</u> der Spitze Q und dem <u>Ortsvektor</u> des Schaftes P.**

Mat. 18/HT/Aufg. 4/1: Kräfte (Figur Seite 13)
An einem Massenpunkt *M* greifen drei Kräfte an. Diese sind durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ gegeben. Aufgabenstellung: Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung einen Kraftvektor $\vec{d}$ so ein, dass die Summe aller vier Kräfte (in jeder Komponente) gleich null ist!

Mat. 18/HT/Aufg. 5/1: Normalvektor
Gegeben ist eine Strecke AB im $\mathbb{R}^2$ mit *A* = (3|4) und *B* = (–2|1). Aufgabenstellung: Geben Sie einen möglichen Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{n} \neq (0,\ 0)$ an, der mit der Strecke AB einen rechten Winkel einschließt!



Die Summe aller Vektoren, die ein (geschlossenes) Vieleck bilden, ergibt den Nullvektor. Physikalisch: Die von diesen Vektoren symbolisierten Kräfte heben sich auf.



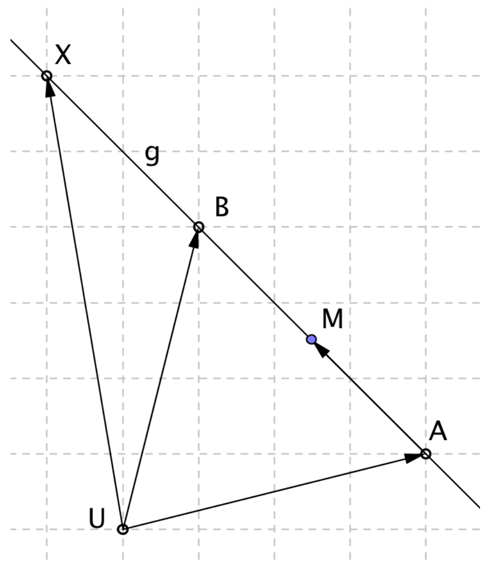
Zu AG 3.4

7. Die Parameterdarstellung der Geraden

Die Geradendarstellung durch lineare Gleichungen in zwei Unbekannten x, y, insbesondere durch Funktionsgleichungen y = kx + d, ist auf Gerade im Raum (R3) nicht anwendbar, wohl aber umgekehrt: **Die Parametergleichung (= Vektorgleichung) einer Geraden g = (AB) lässt sich durch den Ortsvektor $\vec{a}$ eines Punktes A ∈ g und einen Richtungsvektors (z. B. $\vec{v} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$) wie folgt darstellen, wobei $\vec{x}$ der Ortsvektor jedes Punktes X(x/y) ∈ g ist:**

$$\vec{x} = \vec{a} + t.\vec{v} \quad (X = A + t.\vec{v})$$

t ∈ R heißt Parameter der Gleichung, zu jedem t gehört genau ein Punkt X.



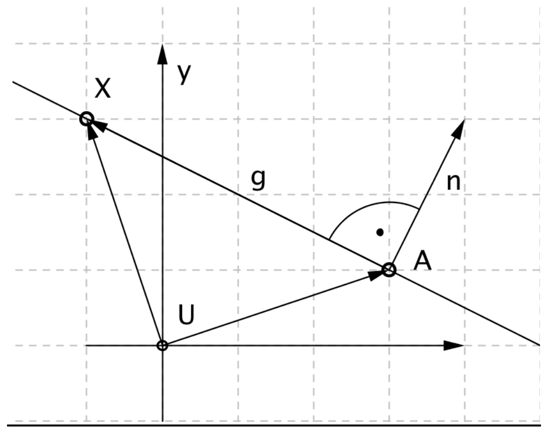
Zu t = 0 gehört der Punkt A, zu t = 1 gehört der Punkt M: $\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}.(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}.(\vec{a} + \vec{b})$. Zu t = 2 gehört der Punkt B, zu t < 0 gehören die rechts von A liegenden Punkte der Geraden g. Im zweidimensionalen Raum ergibt sich die parameterfreie Geradengleichung aus der Parameterform durch Elimination des Parameters t nach folgendem Beispiel:

g = (AB) mit A(4/0) und B(0/6) ⇒ M(2/3), $\vec{v} = \overrightarrow{AM} = \vec{m} - \vec{a} = (-2,3) \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + t.\vec{v} \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dieser Vektorgleichung entsprechen die zwei linearen Gleichungen x = 4 – 2t und y = 3t, also $t = \frac{y}{3}$ und $x = 4 - \frac{2y}{3}$ oder $3x + 2y = 12$ oder (Abschnittsform) $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$. Beachte: In der parameterfreien Gleichung bilden die Koeffizienten des x und des y einen Normalvektor $\vec{n} = (3,2)$ von $\vec{v}$ und damit auch von g.

Warum ist das so?

Im R2 bestimmen ein Punkt A und ein Vektor $\vec{n}$ eine Gerade g eindeutig. (Im R3 wird dadurch eine Ebene bestimmt.) Rechnung: $\overrightarrow{AX}.\vec{n} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} =$

$= n_x.x - n_x.a_x + n_y.y - n_y.a_y = 0$. Diese Herleitung einer Geradengleichung im R2 nennt man **Normalvektorform.**



Schnittpunkte zweier Geraden: Im R2 lassen sich diese durch Gleichsetzen der beiden Parameterformen und Auflösen der beiden linearen Gleichungen in den Parametern s, t berechnen. In der parameterfreien Form (Normalvektorform) geht es jedoch einfacher. Im R3 haben zwei Gerade im Regelfall keinen gemeinsamen Schnittpunkt.

Lösungsmenge einer linearen Gleichung in zwei Variablen: Man formt die Gleichung auf Parameterform um. Beispiel: x – 2y - 3 = 0 enthält den Punkt A(5/1) und hat den Richtungsvektor $\vec{v} = (2,1)$ = Normalvektor von $\vec{n} = (1,-2)$. $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ <u>L = {(x, y) / x = 5 + 2t, y =1 + t}</u>

Mat. 18/1. NT/Aufg. 5/1: Zur x-Achse parallele Gerade

Gegeben ist eine Gerade g mit der Parameterdarstellung g: $\vec{x} = (2,\ 1) + t.\vec{a}$ mit t ∈ **R.** Aufgabenstellung: Geben Sie einen Vektor $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ so an, dass die Gerade g parallel zur x-Achse verläuft.

Mat. 18/2. NT/Aufg. 4/1: Parallele Geraden

Gegeben sind die Parameterdarstellungen zweier Geraden g: $X = P + t.\vec{u}$ und h: $X = Q + s.\vec{v}$. (s, t sind reelle Zahlen, die beiden Richtungsvektoren sind keine Nullvektoren.) Aufgabenstellung: Welche der nachfolgend angeführten Aussagen sind unter der Voraussetzung, dass die beiden Geraden zueinander parallel, aber nicht identisch sind, stets zutreffend? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$P = Q$	$P \in h$	$Q \notin g$	$\vec{u}.\vec{v} = 0$	$\vec{u} = a.\vec{v}$ (a ∈ R ohne 0)

Mat. 17/HT/Aufg. 5/1: Parallelität von Geraden

Gegeben sind folgende Parameterdarstellungen der Geraden *g* und *h*:

$$G: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad h: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s.\begin{pmatrix} 6 \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Koordinaten h_y und h_z des Richtungsvektors der Geraden *h* so, dass die Gerade *h* zur Geraden *g* parallel ist!

Mat. 18/HT/Aufg. 5/1: Rechter Winkel

Gegeben ist eine Strecke *AB* im R^2 mit *A* = (3|4) und *B* = (–2|1). Aufgabenstellung: Geben Sie einen möglichen Vektor $\vec{n} \in R^2$ an, der nicht der Nullvektor ist und der mit der Strecke *AB* einen rechten Winkel einschließt!

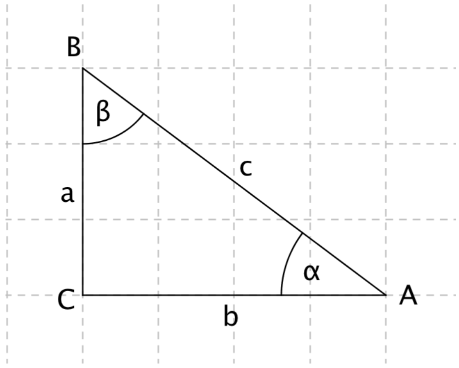
Zu AG 4.1 und AG 4.2

8. Sinus, Cosinus und Tangens

Sinus, Cosinus und Tangens im rechtw. Dreieck:

Der Sinus eines Winkels im rechtw. Dreieck ist das Verhältnis von (Länge der) Gegenkathete zu (Länge der) Hypotenuse; der Cosinus eines Winkels im rechtw. Dreieck ist das Verhältnis von (Länge der) Ankathete zu (Länge der) Hypotenuse; der Tangens eines Winkels im rechtw. Dreieck ist das Verhältnis von (Länge der) Gegenkathete zu (Länge der) Ankathete:

$$\mathbf{\sin(\alpha) = a/c,\ \cos(\alpha) = b/c,\ \tan(\alpha) = a/b}$$
$$\mathbf{\sin(\beta) = b/c,\ \cos(\beta) = a/c,\ \tan(\beta) = b/a}$$



Wegen $\alpha + \beta = 90°$ (Komplementärwinkel) folgt daraus sofort $\mathbf{\sin(\alpha) = \cos(90°\text{-}\alpha)}$ und $\mathbf{\cos(\alpha) = \sin(90°\text{-}\alpha)}$. Weiters gilt wegen a/c : b/c = a/b $\mathbf{\sin(\alpha) : \cos(\alpha) = \tan(\alpha)}$. Und: Dividiert man den Pythagoräischen Lehrsatz $a^2 + b^2 = c^2$ durch c^2, so folgt daraus unmittelbar $\mathbf{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$.

Besondere Winkel: Die 45°-Winkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck führen unmittelbar zu den Werten $\mathbf{\sin(45°) = \cos(45°) =} \frac{1}{2}.\sqrt{2}$ und $\mathbf{\tan(45°) = 1}$. Die 30°- und 60°-Winkel im halben gleichseitigen Dreieck führen unmittelbar zu den Werten $\mathbf{\sin(30°) = \cos(60°) =} \frac{1}{2}$ und $\mathbf{\sin(60°) = \cos(30°) =} \frac{1}{2}.\sqrt{3}$.

Winkelfunktionen:

Dieser Begriff erhält erst durch die Betrachtung der kontinuierlichen Veränderung der Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte (= Funktionswerte) bei kontinuierlich wachsenden Winkelwerten (= Stellen) seine Bedeutung. **Dabei werden zur Definition die Koordinaten der Punkte auf dem Einheitskreis herangezogen, die zu einem bestimmten, von der positiven x-Achse weg gemessenen Winkel gehören, und zwar geben die x-Koordinaten den Cosinuswert und die y-Koordinaten den Sinuswert des Winkels an.** Gleichzeitig lässt sich damit der Definitionsbereich 0° < x < 90° (Gradmaß) bzw. 0 < x < π/2 (Bogenmaß) der Winkelgrößen beliebig erweitern, und zwar im Bogenmaß bis hin zur Menge **R** aller reellen Zahlen. (Negative Winkel = Messung im Uhrzeigesinn.)

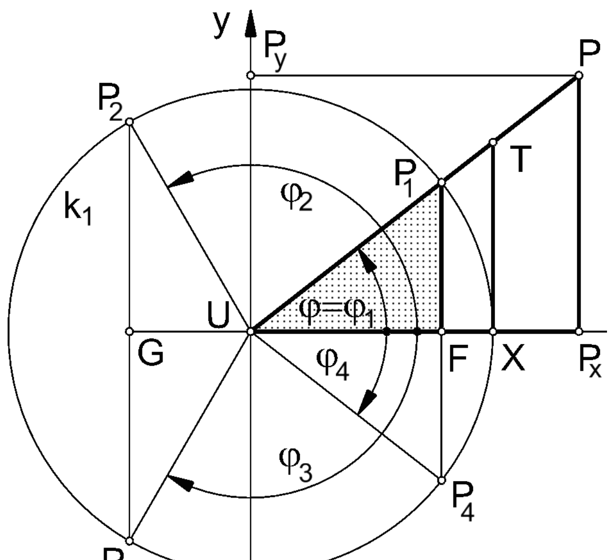
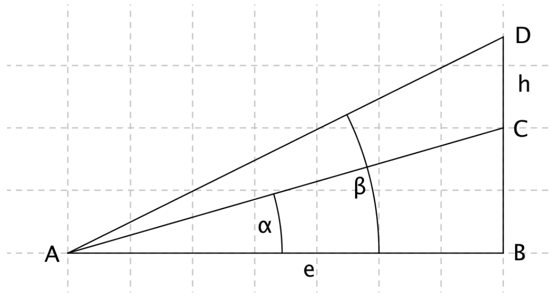


Fig. 2

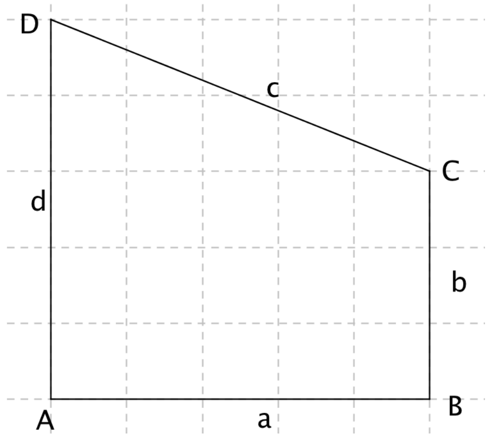
Im Besonderen gilt dann auch sin(0°) = sin(0) = 0, sin(90°) = sin(π/2) = 1 und **sin(180° - α) = sin(π - α) = sin(α),** insbesondere daher sin(180°) = sin(π) = 0, sowie cos(0°) = cos(0) = 1, cos(90°) = cos(π/2) = 0 und **cos(180° - α) = cos(π - α) = - cos(α)**, daher insbesondere cos(180°) = cos(π) = -1. Letzteres wird bereits bei der geom. Definition des Skalarproduktes gebraucht.

Mat. 16/HT/Aufg. 6/1: Vermessung einer unzugänglichen Steilwand. Ein Steilwandstück CD mit der Höhe h ist unzugänglich. Um h bestimmen zu können, werden die Entfernung e = 6 m der waagr. Strecke AB und zwei Winkel $\alpha = 24°$ und $\beta = 38°$ gemessen. Der Sachverhalt wird durch nebenstehende, nicht maßstabsgetreue Abbildung veranschaulicht. Aufgabenstellung: Berechnen Sie die Höhe h in Metern.



Mat. 18/1. NT/Aufg. 6/1: Rechtwinkliges Dreieck
Eine der Aufgabenstellung beigefügte Figur stellt ein rechtw. Dreieck dar, dessen Hypotenuse mit w und dessen zu einem eingezeichneten Winkel β gehörige Ankathete mit x bezeichnet ist. Aufgabenstellung: w ist durch x und β darzustellen, also w = T(x, β).

Mat. 18/2. NT/Aufg. 6/1:Viereck
Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Seitenlängen a, b, c und d. Aufgabenstellung: Zeichnen Sie in der Abbildung einen Winkel φ ein, für den $\sin(\varphi) = \frac{d - b}{c}$ gilt!



Mat. 17/HT/ Aufg. 6/1: Koordinaten eines Punktes
In Abbildung links unten ist der Punkt P(–3|–2) dargestellt. Die Lage des Punktes P kann auch durch die Angabe des Abstands $r = \overline{OP}$ und die Größe des Winkels φ eindeutig festgelegt werden. [Das nennt sich **Polarkoordinatendarstellung** P(r, φ)]. Aufgabenstellung: Berechnen Sie die Größe des Winkels φ!

Mat. 18/HT/Aufg. 6/1: Sinus und Cosinus
Die Abbildung rechts unten zeigt einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 1. Die Punkte A(1|0) und P liegen auf der Kreislinie. Der eingezeichnete Winkel α wird vom Schenkel OA zum Schenkel OP gegen den Uhrzeigersinn gemessen. Ein Punkt Q auf der Kreislinie soll in analoger Weise einen Winkel β festlegen, für den folgende Beziehungen gelten: sin(β) = –sin(α) und cos(β) = cos(α). Aufgabenstellung: Zeichnen Sie in der Abbildung (rechts unten) den Punkt Q ein!