Dieter Grillmayer:

Funktionale Abhängigkeiten

Vorwort

Dies ist der II. Teil einer Handreichung, die ich im Jahr 2019 für einen meiner Enkel ausgearbeitet habe, um ihm dabei behilflich zu sein, die schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (österr. Zentralmatura) zu bestehen. Sie umfasst daher auch nur ein Wissen und Können, das eine Voraussetzung für die Bewältigung der 24 Aufgaben des „Kernbereichs" der schriftlichen Zentralmatura darstellt. (16 „Richtige" reichen für eine positive Beurteilung der ganzen Zentralmatura aus.) Dieser Lehrstoff wurde im Auftrag des BMU von einer Projektgruppe zusammengestellt, in vier Teile gegliedert und inhaltlich kurz beschrieben. Aus jedem dieser vier Teile kommen genau sechs Aufgaben zur Zentralmatura.

Zu Beginn jedes der vier Teile habe ich die von der Projektgruppe erstellten ANFORDERUNGEN aufgelistet. Wo ich in meinen Ausarbeitungen ein wenig darüber hinausgegangen bin ist das im Text vermerkt bzw. *kursiv geschrieben*. Andererseits sind Sätze und Formeln vielfach ohne Beweis angegeben.

Meine damalige Arbeit ist nicht perfekt und wäre sicher auch noch ausbaufähig. Gleichwohl hielt ich sie aber schon in dieser Form für geeignet, einem größeren Kreis von AHS-Maturanten dienen zu können, nicht zuletzt deshalb, weil ich über 150 (das sind an die 40 %) der zwischen 2014 und 2019 gestellten Maturaaufgaben hineinkopiert habe. An ihnen ist auch erkennbar, auf welches Wissen und Können ganz konkret Wert gelegt wird. Darum habe ich die Handreichung nach deren Fertigstellung auch auf meine Website www.grillmayer-dieter.at gestellt und dort mit einem Vorwort versehen, das vor allem darauf hinweist, dass es sich wirklich nur um eine Handreichung zu dem bereits genannten Zweck, aber keineswegs um eine wissenschaftliche Arbeit handelt.

Leider habe ich erst vor ein paar Wochen bemerkt, dass die einzelnen Teile der Arbeit bei entsprechender Titeleingabe z. B. über google im Internet als selbständige PDF-Dateien abgerufen werden können, also ohne das auf meiner Website stehende Vorwort, das auf die Entstehung und die zweifellos damit verbundenen Mängel hinweist. Daher statte ich nunmehr jede der vier PDF-Dateien mit diesem Vorwort aus.

Zuletzt: Alle seit 2014 gegebenen Maturaaufgaben finden sich einschließlich der Lösungen im Internet unter verschiedenen Adressen, z. B. unter www.marthago.at/zentralmatura.

Garsten, am 5. Jänner 2022

Schriftl. Zentralmatura Mathematik

Teil II:

Funktionale Abhängigkeiten (FA)

Bildungstheoretische Orientierung

Wenn Experten Mathematik verwenden, bedienen sie sich oftmals des Werkzeugs der Funktionen. Für eine verständige *Kommunikation* ist es daher notwendig, mit der spezifischen funktionalen Sichtweise verständig und kompetent umzugehen. Das meint, die Aufmerksamkeit auf die Beziehung zwischen zwei (oder mehreren) Größen in unterschiedlichen Kontexten fokussieren zu können sowie die gängigen Darstellungsformen zu kennen und mit ihnen flexibel umgehen zu können.

Im Zentrum des mathematischen *Grundwissens* steht dann das Kennen der für die Anwendungen wichtigsten Funktionstypen: Namen und Gleichungen kennen, typische Verläufe von Graphen (er)kennen, zwischen den Darstellungsformen wechseln, charakteristische Eigenschaften wissen und im Kontext deuten (können).

Insgesamt sind eher kommunikative Handlungen (Darstellen, Interpretieren, Begründen) bedeutsam, manchmal können auch konstruktive Handlungen (Modellbildung) hilfreich sein; mathematisch-operative Handlungen hingegen sind in Kommunikationssituationen von eher geringer Bedeutung.

Darüber hinaus ist *(Reflexions-)Wissen* um Vor- und Nachteile der funktionalen Betrachtung sehr wichtig. Hilfreich ist in diesem Zusammenhang das Wissen über unterschiedliche Typen von Modellen (konstruktive, erklärende, beschreibende) sowie deren Bedeutung und Verwendung.

Wenn die wichtigsten Funktionstypen überblickt werden und wichtige Eigenschaften für das Beschreiben von Funktionen bekannt sind (Monotonie, Monotoniewechsel, Wendepunkte, Periodizität, Nullstellen, Polstellen), ist die Kommunikation auch auf zunächst unbekannte Funktionen bzw. Kompositionen von Funktionen erweiterbar.

1. Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

FA 1. 1 Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann

FA 1.2 Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können

FA 1.3 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können

FA 1.4 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

FA 1.5 Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie(wechsel), lokale Extrema, Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen

FA 1.6 Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können

FA 1.7 Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können

FA 1.8 Durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können

FA 1.9 einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können

Anmerkungen zu FA 1:
Auf eine sichere Unterscheidung zwischen funktionalen und nichtfunktionalen Zusammenhängen wird Wert gelegt, auf theoretisch bedeutsame Eigenschaften (z. B. Injektivität, Surjektivität, Umkehrbarkeit) wird aber nicht fokussiert. Im Vordergrund steht die Rolle von Funktionen als Modelle und die verständige Nutzung grundlegender Funktionstypen und deren Eigenschaften sowie der verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen (auch $f\colon A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$).
Die Bearbeitung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen beschränkt sich auf die Interpretation der Funktionsgleichung im jeweiligen Kontext sowie auf die Ermittlung von Funktionswerten.
Der Verlauf von Funktionen soll nicht nur mathematisch beschrieben, sondern auch im jeweiligen Kontext gedeutet werden können.

2. Die Lineare Funktion [$f(x) = k \cdot x + d$]
FA 2.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA 2.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können
FA 2.3 Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
FA 2.4 Wichtige Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können: $f(x + 1) = f(x) + k$;
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$
FA 2.5 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können
FA 2.6 direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können

Anmerkungen zu FA 2:
Die Parameter k und d sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

3. Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z$ und Funktionen vom Typ $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $z \in$ Z\{0} oder $z = ½$ (Quadtatwurzel):
FA 3.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA 3.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen dieser Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter a und b ermitteln und im Kontext deuten können
FA 3.3 Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können
FA 3.4 Indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x)$ = a/x (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$) beschreiben können

4. Polynomfunktion [$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a.x^i$ mit $n \in$ N\{0}]
FA 4.1 Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen
FA 4.2 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können
FA 4.3 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können
FA 4.4 Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der (möglichen) Null-, Extrem- und Wendestellen wissen

Anmerkungen zu FA 4:
Der Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der (möglichen) Null-, Extrem- und Wendestellen sollte für beliebige n bekannt sein, konkrete Aufgabenstellungen beschränken sich auf Polynomfunktionen mit $n \leq 4$.
Mithilfe elektronischer Hilfsmittel können Argumentwerte auch für Polynomfunktionen höheren Grades ermittelt werden.

5. Exponentialfunktion [$f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in R^+, \lambda \in R\setminus\{0\}$]
FA 5.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA 5.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
FA 5.3 Die Wirkung der Parameter a und b bzw. λ kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
FA 5.4 Wichtige Eigenschaften ($f(x + 1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können
FA 5.5 Die Begriffe *Halbwertszeit* und *Verdoppelungszeit* kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können
FA 5.6 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können

Anmerkungen zu FA 5:
Die Parameter a und b bzw. λ sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

6. Sinusfunktion, Cosinusfunktion
FA 6.1 Grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA 6.2 Aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
FA 6.3 Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können
FA 6.4 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können
FA 6.5 wissen, dass $\cos(x) = \sin(x+\pi/2)$
FA 6.6 Wissen, dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

Anmerkungen zu FA 6:
Während zur Auflösung von rechtwinkeligen Dreiecken Sinus, Cosinus und Tangens verwendet werden, beschränkt sich die funktionale Betrachtung (weitgehend) auf die allgemeine Sinusfunktion. Wesentlich dabei sind die Interpretation der Parameter (im Graphen wie auch in entsprechenden Kontexten) sowie der Verlauf des Funktionsgraphen und die Periodizität.

1. Funktionen, F-Gleichungen, F-Graphen

1. Was ist eine Funktion?

Eine Funktion f ist eine **eindeutige Zuordnung** aller Werte einer Zahlenmenge **(= *Definitionsmenge*)** $A = \{x_1, x_2, ...\}$ auf Werte einer Zahlenmenge $B = \{y_1, y_2, ...\}$. Die Zahl $y_1 = f(x_1)$ ist der zu x_1 gehörige ***Funktionswert***. Eindeutig heißt, dass jedem Wert $x \in A$ genau ein Funktionswert zugeordnet ist. Es müssen aber nicht alle Werte der ***Wertemenge*** B Funktionswerte sein. Ist das aber der

Fall, dann ist die Funktion surjektiv. Weiters kann ein und derselbe Wert $y \in B$ auch mehrmals als Funktionswert auftreten. Ist das nicht der Fall, dann heißt die Funktion injektiv. Ist eine Funktion sowohl surjektiv als auch injektiv, so ist sie bijektiv oder ***umkehrbar eindeutig***.

Laut Anforderungskatalog gehören die Begriffe surjektiv, Injektiv und bijektiv nicht zum Matura-Wissen. Damit relativiert sich aber auch der Begriff ***Umkehr- oder inverse Funktion*** *f^{-1} für die Abbildung der Menge B (als Definitionsmenge) auf die Menge A (als Wertemenge). (Generell werden eindeutige Zuordnungen in der Mathematik als* ***Abbildungen*** *bezeichnet. Im Speziellen und immer spricht man von Abbildungen, wenn A und B Punktmengen sind. Anstelle von Funktionswerten spricht man dann von Bildpunkten. Alle Abbildungen und insbesondere die geometrischen können surjektiv, injektiv und bijektiv sein.*)

2. Funktionsgleichungen, Funktionsterme:

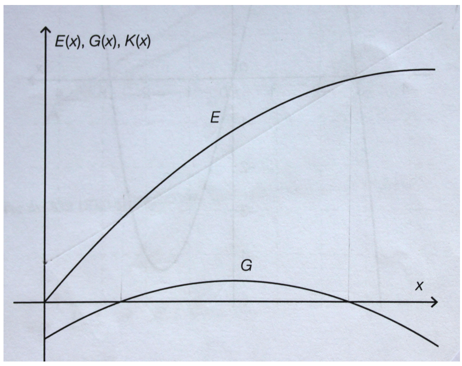
Symbolisch wird eine Funktion als **f: A → B mit x → T(x)** dargestellt. T(x) heißt ***Funktionsterm***, y = T(x) – oder allgemein auch als y = f(x) bezeichnet – heißt ***Funktionsgleichung***. Algebraische Terme (Polynome, rational gebrochene Terme und Wurzelterme) erzeugen ***algebraische Funktionen***, insbesondere ***Potenzfunktionen*** für $T(x) = a.x^r$ mit $a \in R$ und $r \in R$. *Laut Anforderungskatalog werden Potenzfunktionen auf die Fälle $T(x) = a \cdot x^z + b$ mit $z \in Z\backslash\{0\}$ (Polynomfunktionen und einfachste rational gebrochene Funktionen) oder z = ½ (einfachste Wurzelfunktionen) eingeschränkt*. Durch andere Symbole (sin, cos, tan; log, ln) oder durch Exponentialterme (= das x steht im Exponenten) erzeugte Zuordnungen f: A → B nennt man ***transzendente Funktionen***.

3. Funktionsgraph, Funktionskurve:

Jede Funktion kann graphisch in einem Koordinatensystem Uxy durch Punkte P(x/y) dargestellt werden, dessen **Koordinaten geordnete Zahlenpaare** bilden. Bei sogenannten diskreten Definitionsmengen (z. B. N oder Z, aber auch Q) besteht der Funktionsgraph nur aus einzelnen Punkten, bei stetigen Definitionsmengen (Menge R der reellen Zahlen oder Intervalle davon, z. B. $A = R^+$ oder $A = \{x \in R/\ a \leq x \leq b\}$) verdichtet sich der Graph zu einer ***Funktionskurve***. (*Im Matura-Begleittext ist von* ***reellen Funktionen*** *die Rede. Darunter sind offenbar Funktionen der letztgenannten Art gemeint. In der Folge wird der Maturastoff dann offenbar auf solche Funktionen eingeschränkt, sodass also immer Funktionskurven auftreten.*) Die x-Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit der x-Achse heißen ***Nullstellen*** der Funktion und berechnen sich als Lösungen der Gleichung T(x) = 0.

Mat. 2016/HT/Aufg. 1/8:

Kosten, Erlös und Gewinn:
Die Funktion E beschreibt den Erlös (in €) beim Absatz von x Mengeneinheiten eines Produkts. Die Funktion G beschreibt den dabei erzielten Gewinn (in €), wenn alle produzierten Produkteinheiten verkauft werden. Dieser Gewinn ist definiert als Differenz „Erös – Kosten". Aufgabenstellung: Ergänzen Sie die nebenstehende Abbildung durch den Graphen der Kostenfunktion K. Nehmen Sie dabei K als linear an. (Der Graph von K ist also eine Gerade.) Anleitung: Die Nullstellen von G sind bedeutsam.

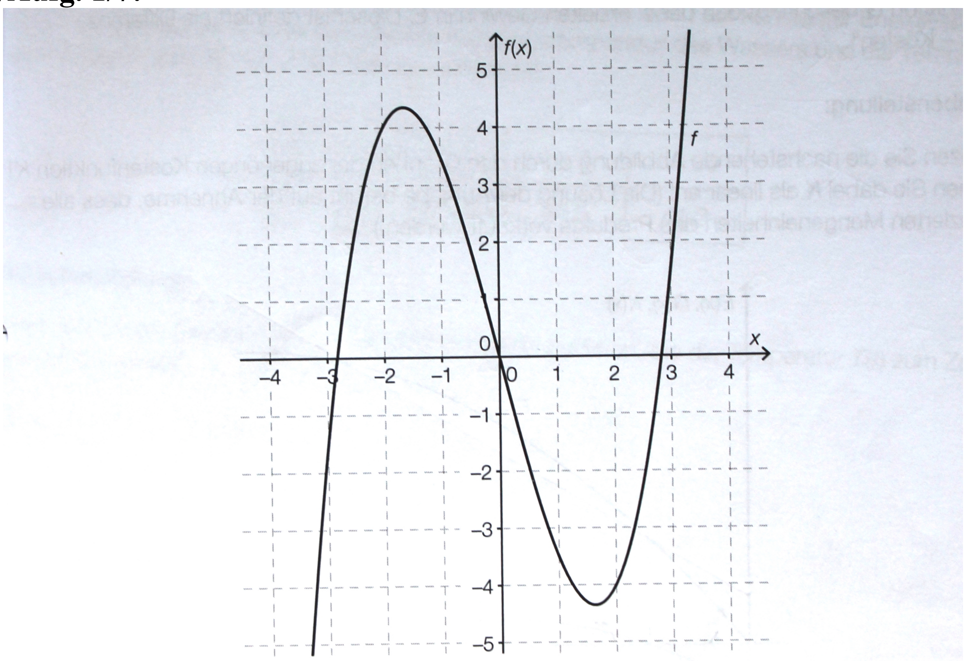


4. Vorgriff auf Teil III:

Die Nullstellen der ***ersten Ableitung(sfunktion)*** f' mit der Gleichung y = T'(x), welche dem jeweiligen x-Wert die ***Steigung*** k = tanφ der Funktionskurve an dieser Stelle zuordnet, weisen auf Punkte mit waagrechten Tangenten hin. Das sind ***Scheitel(punkte),*** wenn die ***zweite Ableitungsfunktion*** f'' mit der Gleichung y = T''(x), welche dem jeweiligen x-Wert die ***Krümmung*** der Funktionskurve an dieser Stelle zuordnet, dort **keine Nullstellen** hat, und zwar ***Hochpunkte*** **H, wenn T''(x) an dieser Stelle kleiner als 0 und** ***Tiefpunkte*** **T, wenn T''(x) an dieser Stelle größer als 0 ist.** Die Funktion f erreicht bei H ein ***lokales Maximum*** $\mathbf{y_{max}}$, d. h. alle benachbarten Werte sind kleiner als $\mathbf{y_{max}}$, und bei T ein ***lokales Minimum*** $\mathbf{y_{min}}$, d. h. alle benachbarten Werte sind größer als $\mathbf{y_{min}}$. **Nullstellen von T''(x)** = 0 weisen auf ***Wendepunkte***, das sind Punkte mit der Krümmung 0, der Funktionskurve von f hin.

Das folgende Maturabeispiel dient der Veranschaulichung von Hoch-, Tief und Wendepunkten sowie der Begriffe ***monoton wachsend, monoton fallend*** sowie ***positive Krümmung*** (= Linkskrümmung) und ***negative Krümmung*** (= Rechtskrümmung).

Mat. 16/HT/Aufg. 1/7:



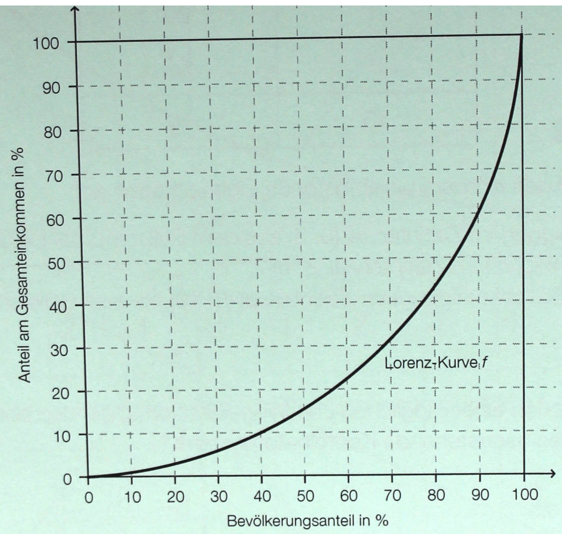
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die für den dargestellten Funktionsgraphen von *f* zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Funktion *f* ist im Intervall (2; 3) monoton steigend.	☐
Die Funktion *f* hat im Intervall (1; 2) eine lokale Maximumstelle.	☐
Die Funktion *f* ändert im Intervall (–1; 1) das Krümmungsverhalten.	☐
Der Funktionsgraph von *f* ist symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse.	☐
Die Funktion *f* ändert im Intervall (–3; 0) das Monotonieverhalten.	☐

Mat. 15/HAT/Aufg. 1/08:

Die in der Abbildung auf der nächsten Seite dargestellte Lorenz-Kurve kann als Graph einer Funktion f verstanden werden, die gewissen Bevölkerungsanteilen deren jeweiligen Anteil am Gesamteinkommen zuordnet. Dieser Lorenz-Kurve kann man z. B. entnehmen, dass die einkommensschwächsten 80 % der Bevölkerung über ca. 43 % des Gesamteinkommens verfügen. Das bedeutet zugleich, dass die einkommensstärksten 20 % über 57 % des Gesamteinkommens verfügen.



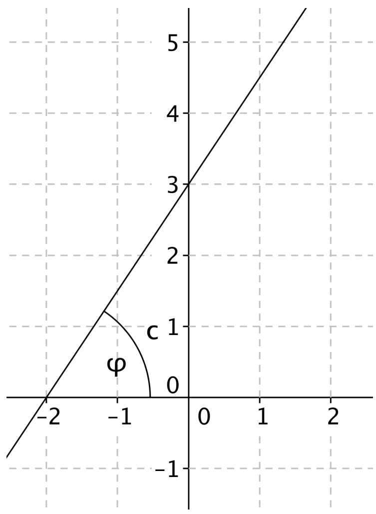
Quelle: http://www.lai.fu-berlin.de/e-learning/projekte/vwl_basiswissen/Umverteilung/Gini_Koeffizient/index.html [21.01.2015] (adaptiert)

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden für die oben dargestellte Lorenz-Kurve zutreffenden Aussagen an!

Die einkommensstärksten 10 % der Bevölkerung verfügen über ca. 60 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensstärksten 40 % der Bevölkerung verfügen über ca. 90 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensschwächsten 40 % der Bevölkerung verfügen über ca. 10 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensschwächsten 60 % der Bevölkerung verfügen über ca. 90 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensschwächsten 90 % der Bevölkerung verfügen über ca. 60 % des Gesamteinkommens.	☐

2. Lineare Funktionen y = k.x + d



Nach Teil I gilt: Jede Gerade g in einer mit einem System Uxy unterlegten Ebene kann durch eine **lineare Gleichung Ax + By + C = 0** in zwei Variablen x und y dargestellt werden, indem alle Lösungen dieser Gleichung die Koordinaten aller Punkte dieser Geraden angeben. Für B = 0 ergeben sich die zur y-Achse parallelen Geraden mit der Gleichung x = -C/A = c. Für A, B, C $\neq$ 0 kann die **allgemeine Geradengleichung** in ihre **Abschnittsform** x/c + y/d = 1 mit c = -C/A und d = -C/B übergeführt werden, wodurch sich sofort die Schnittpunkte X(c/0) und Y(0/d) mit den Achsen ergeben.

Für B $\neq$ 0 kann die allgemeine Geradengleichung in eine **Funktionsgleichung** y = (-A/B).x + (–C/B) = kx + d umgeformt werden; die zugehörige Gerade ist der Graph der ***linearen Funktion*** mit dieser Funktionsgleichung, also mit dem Funktionsterm **T(x) = kx + d.**

Darin ist k wegen y' = k = tan(φ) die konstante Steigung der Geraden und d ist die y-Koordinate des Schnittpunktes Y mit der y-Achse. Für k > 0 (φ < 90°) steigt die Gerade von links unten nach rechts oben, für k < 0 (φ > 90°) von rechts unten nach links oben. Für k = 0 ergibt sich eine zur x-Achse parallele Gerade und **y = d** ist die Funktionsgleichung der ***konstanten Funktion*** (Sonderfall einer linearen Funktion).

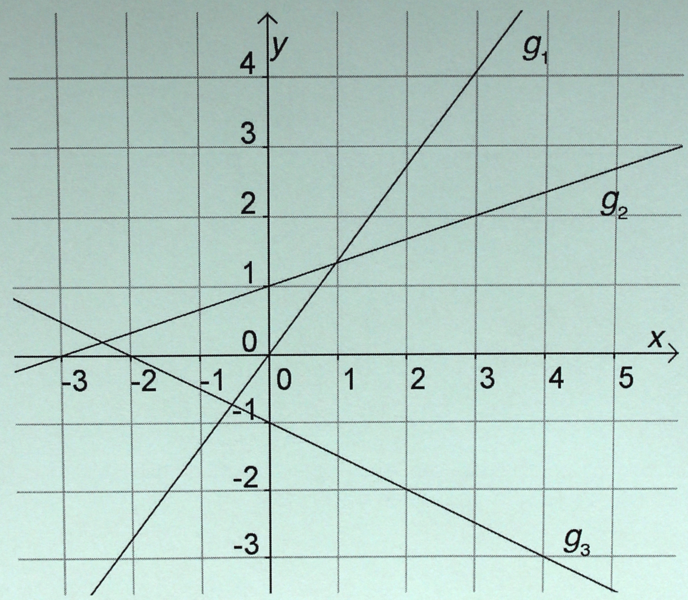
Die Abbildung auf Seite 6 zeigt die Gerade mit der Gleichung -3x + 2y - 6 = 0, in der Abschnittsform x/(-2) + y/3 = 1 und mit der Funktionsgleichung y = (3/2).x + 3. Wir erkennen daraus unschwer die folgende Formel, nach welcher k = tan(φ) aus zwei Zahlenpaaren (x_1/y_1) und (x_2/y_2), also aus den Koordinaten zweier Punkte des Graphen, berechnet werden kann:

$$\boxed{[f'(x)] = k = \tan(\varphi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

Mat. 14/1. NT/Aufg. 1/10:

In der untenstehenden Graphik sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3 dargestellt. Es gilt:

g_1: $y = k_1 \cdot x + d_1$
g_2: $y = k_2 \cdot x + d_2$
g_3: $y = k_3 \cdot x + d_3$



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$k_1 < k_2$	☐
$d_3 > d_2$	☐
$k_2 > k_3$	☐
$k_3 < k_1$	☐
$d_1 < d_3$	☐

Praktische Anwendungen:

a) ***Direkt proportionale Größen*** sind Zahlenpaare (x, y), welche der Funktionsgleichung y = k.x gehorchen, k ist in diesem Fall der ***Proportionalitätsfaktor***.

b) Die wohl wichtigste lineare Funktion ist die **Weg-Zeit-Funktion bei konstanter Geschwindigkeit** v nach der physikalischen Formel v = s/t mit t = x und s = y, also s = v.t. Die Steigung k der Geraden, d. h. die 1. Ableitung s'(t) ist v. Die international verwendete Einheit ist Meter pro Sekunde (m/s), gebräuchlich sind auch Kilometer pro Stunde (km/h).

c) Zahlreiche **geom. Formeln**, in denen Maßzahlen nur linear auftreten, also z. B. Quadratseite und Umfang oder Kreisradius und Umfang: u = 4.a, u = 2rπ = (2π).r (= direkte Proportionalität).

Mat. 15/1. NT/Aufg. 1/07:

Ein Körper wird entlang einer Geraden bewegt.
Die Entfernungen des Körpers (in Metern) vom Ausgangspunkt seiner Bewegung nach t Sekunden sind in der nachstehenden Tabelle angeführt.

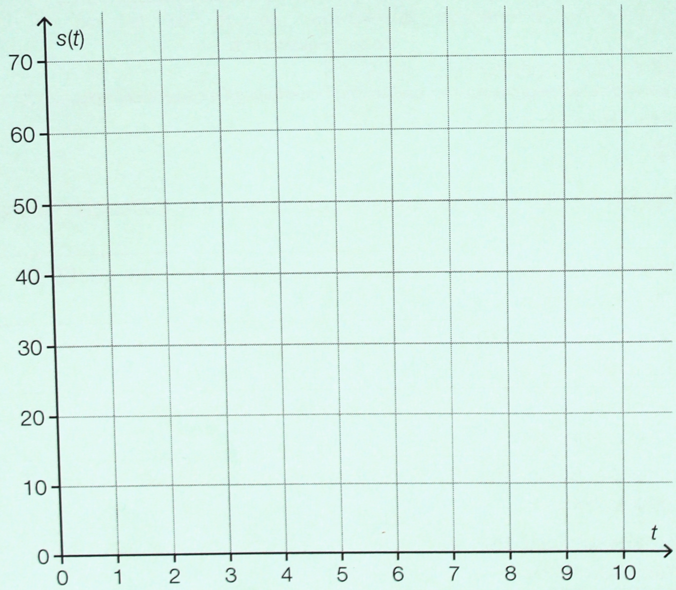
Zeit (in Sekunden)	zurückgelegter Weg (in Metern)
0	0
3	20
6	50
10	70

Der Bewegungsablauf des Körpers weist folgende Eigenschaften auf:

- (positive) Beschleunigung im Zeitintervall [0; 3) aus dem Stillstand bei $t = 0$
- konstante Geschwindigkeit im Zeitintervall [3; 6]
- Bremsen (negative Beschleunigung) im Zeitintervall (6; 10] bis zum Stillstand bei $t = 10$

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den Graphen einer möglichen Zeit-Weg-Funktion s, die den beschriebenen Sachverhalt modelliert, in das nachstehende Koordinatensystem!



Mat. 14/1. NT/Aufg. 1/9:
Gegeben ist eine Gleichung einer Geraden g in der Ebene: $3 \cdot x + 5 \cdot y = 15$. Aufgabenstellung: Geben Sie die Steigung des Graphen der dieser Gleichung zugeordneten linearen Funktion an!

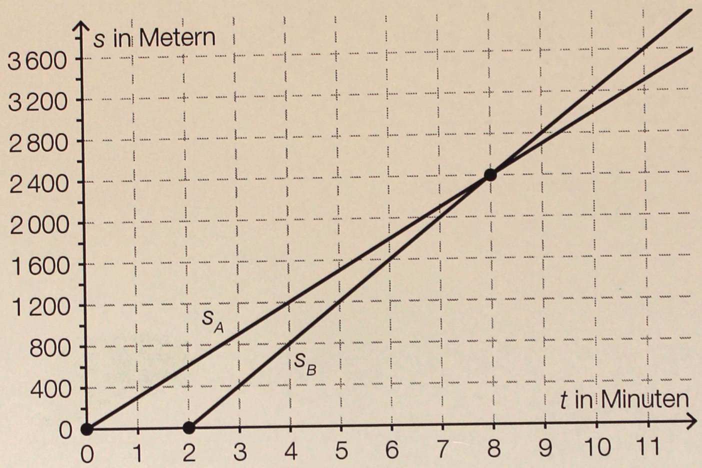
Mat. 16, Aufg. 1/9:
Bei einem Versuch ist eine bestimmte Wassermenge für eine Zeit t (in Sekunden) auf konstanter Energiestufe in einem Mikrowellengerät zu erwärmen. Die Ausgangstemperatur T(0) des Wassers beträgt 35,6 ° C, nach 30 Sekunden gilt T(30) = 41,3° C. Aufgabenstellung: T(t) = k.t + d ist die zugehörige Funktionsgleichung. Wie groß ist d, wie groß ist k?

Mat. 14/2. NT/Aufg. 1/8:
Die monatlichen Wasserkosten eines Haushalts bei einem Verbrauch von x m^3 Wasser können durch eine Funktion K mit der Gleichung $K(x) = a + b \cdot x$ mit $a, b \in \mathbf{R}^+$ beschrieben werden. Aufgabenstellung: Erklären Sie, welche Bedeutung die Parameter a und b in diesem Zusammenhang haben!

Mat. 18/HT/Aufg. 1/08:

Zwei Radfahrer A und B fahren mit Elektrofahrrädern vom gleichen Startpunkt aus mit jeweils konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Straße in dieselbe Richtung.

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Funktionen s_A und s_B dargestellt, die den von den Radfahrern zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Fahrzeit beschreiben.
Die markierten Punkte haben die Koordinaten (0|0), (2|0) bzw. (8|2 400).



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die der obigen Abbildung entnommen werden können!

Der Radfahrer B startet zwei Minuten später als der Radfahrer A.	☐
Die Geschwindigkeit des Radfahrers A beträgt 200 Meter pro Minute.	☐
Der Radfahrer B holt den Radfahrer A nach einer Fahrstrecke von 2,4 Kilometern ein.	☐
Acht Minuten nach dem Start von Radfahrer B sind die beiden Radfahrer gleich weit vom Startpunkt entfernt.	☐
Vier Minuten nach der Abfahrt des Radfahrers A sind die beiden Radfahrer 200 Meter voneinander entfernt.	☐

Schlussbemerkung: *Abgesehen von den konstanten Funktionen ist jede lineare Funktion umkehrbar: Der Graph von f^{-1} ergibt sich durch Spiegelung von g an der Geraden mit der Gleichung y = x (**identische Funktion**, die Gerade heißt **erste Mediane**). Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion ergibt sich durch Umformen der ursprünglichen Gleichung, sodass x explizit wird, und zuletzt durch Vertauschen von x und y. Und das gilt für alle Umkehrfunktionen!*

3. Potenzfunktionen $y = a.x^z + b$

Eingeschränkt auf ganzzahlige $z \neq 0$ und $z = ½$ (Quadratwurzel). Für $z = 1$: Lineare Funktion

<u>Potentfunktionen mit $z \in N$</u>

Die zu den Funktionsgleichungen $y = a.x^n + b$ gehörigen Funktionskurven werden ***Parabeln*** genannt, wobei allerdings nur für <u>$n = 2$</u> eine „echte“ Parabel (als Kegelschnitt) entsteht. Deren Scheitel liegt auf der y-Achse im (orientierten) Abstand b vom Ursprung entfernt. Er ist (wegen $y'' = a$) für $a > 0$ ein Tiefpunkt und für $a < 0$ ein Hochpunkt.

Für $n = 3$ liegt wegen $y' = 3a.x^2$ und $y'' = 6a.x$ an der Stelle $x = 0$ ein Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente vor, und zwar im (orientierten) Abstand b vom Ursprung entfernt. Für $a > 0$ steigt die Kurve monoton von links unten nach rechts oben, für $a < 0$ fällt sie von links oben nach rechts unten.

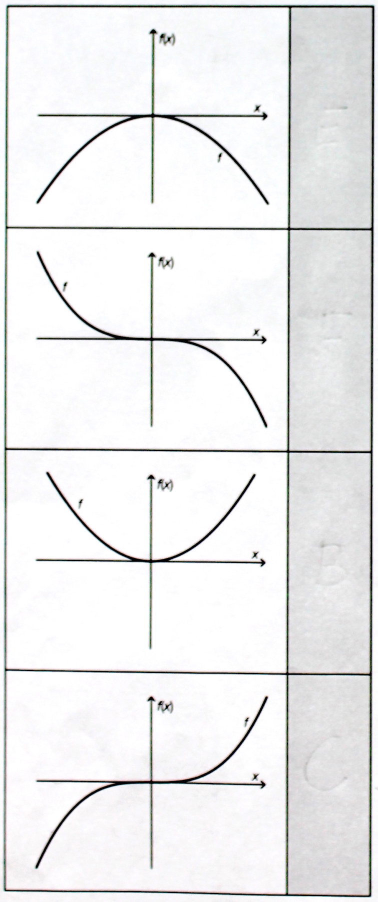
Für $n = 4$ hat die Parabel an der Stelle $x = 0$ einen ***Flachpunkt*** mit waagrechter Tangente, weil dann auch noch die dritte Ableitung an dieser Stelle 0 ist. Für $a > 0$ ist die Kurve nach oben offen, für $a < 0$ nach unten.

Mat. 16/HT/Aufg. 1/10:

Gegeben sind die Graphen von vier verschiedenen Potenzfunktionen f mit $f(x) = a \cdot x^z$ sowie sechs Bedingungen für den Parameter a und den Exponenten z. Dabei ist a eine reelle, z eine natürliche Zahl.

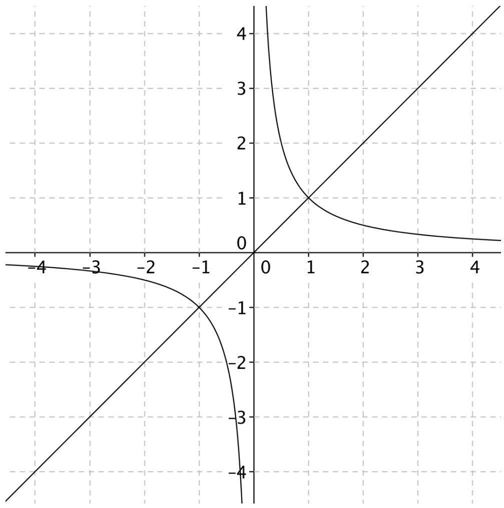
Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die entsprechende Bedingung für den Parameter a und den Exponenten z der Funktionsgleichung (aus A bis F) zu!



A	$a > 0, z = 1$
B	$a > 0, z = 2$
C	$a > 0, z = 3$
D	$a < 0, z = 1$
E	$a < 0, z = 2$
F	$a < 0, z = 3$

Potenzfunktionen mit $z \in Z^{minus}$

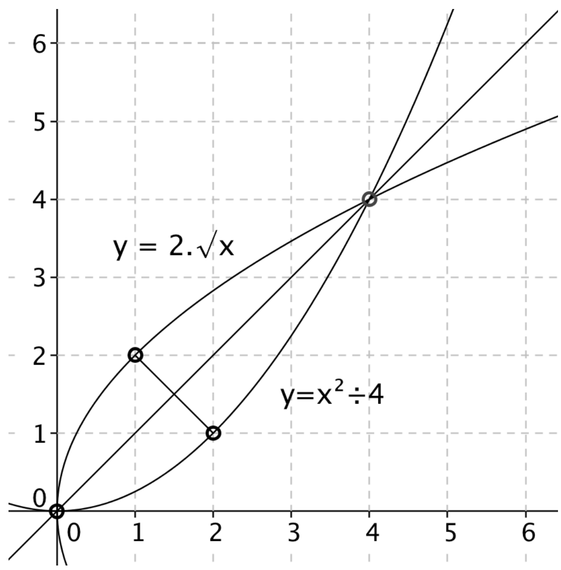


Deren Funktionsterme sind **Bruchterme** (mit x im Nenner)**,** die Funktionen werden ***rational gebrochene Funktionen*** genannt, die Funktionskurven heißen ***Hyperbeln***, weil sie i. A. ***Asymptoten*** (= Tangenten in Fernpunkten) besitzen, wobei die „echten" Hyperbeln (Kegelschnitte) nur als Sonderfälle vorkommen. **Stellen, in denen der Nenner Null wird, sind aus der Definitionsmenge auszunehmen.** (Diese x-Werte werden ***Pole*** genannt.) Hier treten bei den Funktionskurven **Aymptoten parallel zur y-Achse** auf. Daneben können aber auch noch andere, insbesondere **Asymptoten parallel zur x-Achse** auftreten. **Deren y-Werte ergeben sich als Grenzwerte des Funktionsterms für $x \rightarrow \pm \infty$.**

Musterbeispiel: Die Potenzfunktion mit der Gleichung $y = x^{-1} = 1/x$, die jeder Stelle $x \in A = \mathbf{R}/\{0\}$ ihren Kehrwert zuordnet, heißt ***Kehrwertfunktion***. Der Graph (siehe oben) ist eine **gleichseitige Hyperbel** mit den Asymptoten x = 0 und y = 0. Die erste Ableitung f'(x) mit der Gleichung $y' = -1x^{-2} = -1/x^2$ hat keine Nullstelle, daher hat die Funktionskurve keine Scheitel. Auch die zweite Ableitung f''(x) mit der Gleichung $y'' = 2.x^{-3} = 2/x^3$ hat keine Nullstellen, daher hat die Kurve auch keine Wendepunkte. Wegen $y' < 0$ für alle $x \neq 0$ ist die Kurve durchgehend fallend und wegen $y'' < 0$ für alle $x < 0$ im unteren „Ast" negativ, wegen $y'' > 0$ für $x > 0$ im oberen „Ast" positiv gekrümmt.

Nicht nur f: y = 1/x ist **zu sich selbst invers** (siehe Seite 04 und Seite 09), sondern auch aller Funktionen mit der Gleichung $y = a/x$ ($a \neq 0$) sind das. Für ihre Funktionskurven sind die erste oder zweite Mediane (y = -x) Symmetrieachsen und die auf ihnen liegenden Punkte sind die ***Hyperbelscheitel*** A und B. (Achtung: Das sind keine Hoch- oder Tiefpunkte. Der auf der Parabelachse liegende ***Parabelscheitel*** der Funktionskurven von $y = a.x^2 + b$ hingegen ist auch ein solcher.) Die Koordinaten von A und B ergeben sich aus den Gleichungen y = x, also x = a/x oder $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$ für a > 0 bzw. y = –x, also –x = a/x oder $x^2 = -a \Rightarrow x = \pm\sqrt{-a}$ für a < 0. Zahlenpaare, die der Gleichung x.y = a genügen, werden als ***verkehrt proportionale Größen*** bezeichnet.

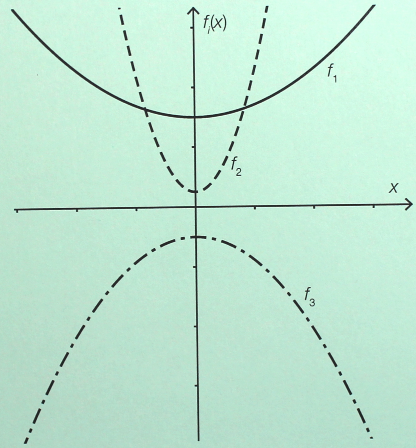
Die Wurzelfunktion y = $a.x^{\frac{1}{2}} = a.\sqrt{x}$ mit der Definitionsmenge $A = \mathbf{R}^+ \cup \{0\} = \mathbf{R_0}$



Die Gleichung ihrer Ableitungsfunktion f'(x) lautet **y' =** $\frac{a}{2}.x^{\frac{-1}{2}} = \frac{a}{2.\sqrt{x}}$ **.** Daher hat die Funktionskurve im Punkt U(0/0) die y-Achse zur Tangente, im Punkt P(1/a) eine Tangente mit der Steigung k = a/2 und diese nimmt mit wachsenden x laufend ab, ohne aber je 0 zu werden. *Die Wurzelfunktion mit der genannten Gleichung ist die Umkehrfunktion der Potenzfunktion mit der Gleichung* $y = \left(\frac{x}{a}\right)^2$, *allerdings nur für den Definitionsbereich A =* $\mathbf{R_0}$*. Denn nach der Schlussbemerkung auf Seite 9 ergibt sich durch Umformen aus dieser Gleichung* $x^2 = a^2.y \Rightarrow x = a.\sqrt{y} \Rightarrow y = a.\sqrt{x}$.

Mat. 18/HT/Aufg. 1/09:

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen quadratischer Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit den Gleichungen $f_i(x) = a_i \cdot x^2 + b_i$, wobei gilt: $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.



Aufgabenstellung:

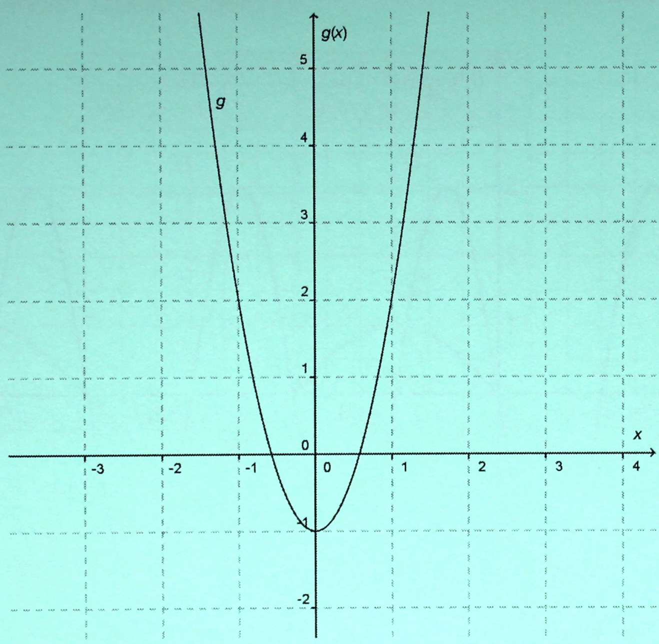
Ordnen Sie die Parameterwerte a_i und b_i jeweils der Größe nach, beginnend mit dem kleinsten!

Parameterwerte a_i: _______ < _______ < _______

Parameterwerte b_i: _______ < _______ < _______

Mat. 14/1. NT/Aufg. 1/12:

Gegeben ist der Graph einer Funktion g mit $g(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0$.

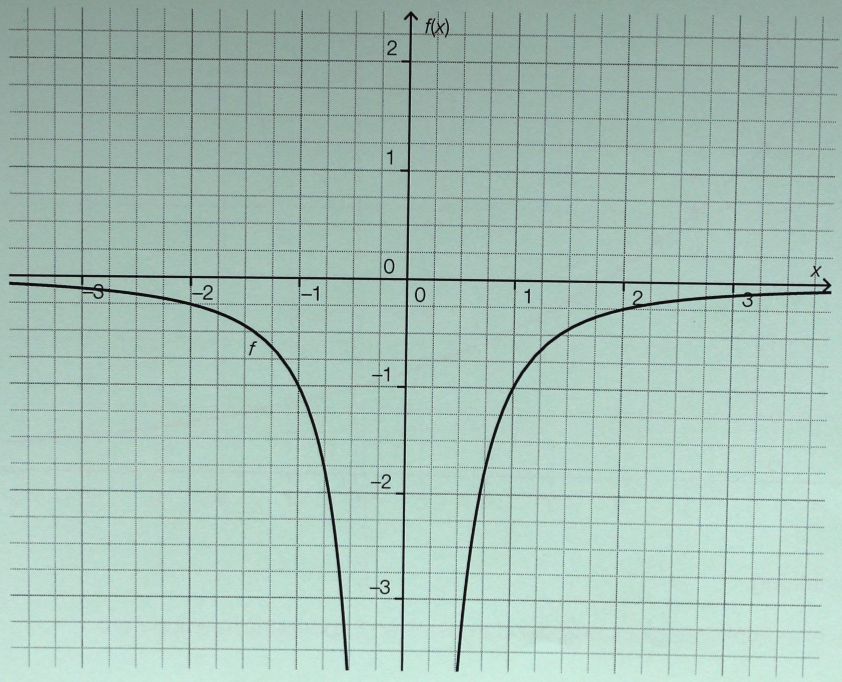


Aufgabenstellung:

Geben Sie die Parameter a und b so an, dass sie zum abgebildeten Graphen von g passen!

Mat. 15/1. NT/Aufg. 1/09:

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Potenzfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^z$ mit $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; $z \in \mathbb{Z}$ dargestellt.



Aufgabenstellung:

Eine der nachstehenden Gleichungen ist eine Gleichung dieser Funktion f.
Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an!

$f(x) = 2x^{-4}$	☐
$f(x) = -x^{-2}$	☐
$f(x) = -x^{2}$	☐
$f(x) = -x^{-1}$	☐
$f(x) = x^{-2}$	☐
$f(x) = x^{-1}$	☐

4. Polynomfunktionen

1. Allgemeine Kennzeichen:

T(x) ist ein Polynom n-ten Grades, also die höchste vorkommende Potenz ist x^n mit $n \in N$. Die Koeffizienten a, b, ... sind reelle Zahlen, die Defintionsmenge ist immer R. Die Funktionskurven heißen ***Parabeln n-ter Ordnung***, für n = 2 sind das Parabeln im eigentlichen Sinn (= Kegelschnitte). Eine Parabel n-ter Ordnung hat maximal n – 1 Scheitel und n – 2 Wendepunkte. (WARUM?). Die einfachsten Polynomfunktionen sind die bereits behandelten linearen Funktionen mit der Gleichung $y = a.x + b = k.x + d$.

2. Quadratische Funktionen:

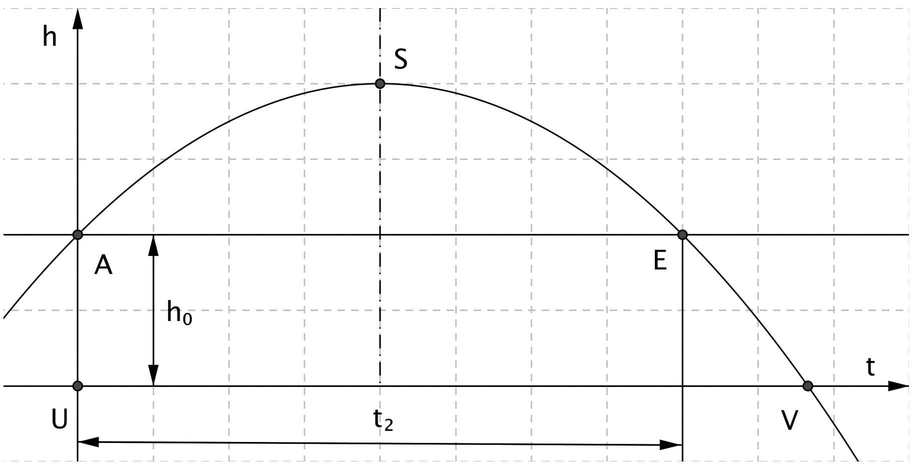
Jeder Term **$T(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$** definiert eine **quadratische Funktion**. Die Funktionskurve ist eine **Parabel mit einem Scheitel S**, dessen x-Wert sich aus der Gleichung $y' = 2ax + b = 0$ ergibt, sodass also $x_S = (-b)/2a$ ist, durch welchen die **lotrechte Parabelachse** (Symmetrieachse) a hindurchgeht. Für **$b = 0$** ist $x_S = 0$, der Scheitel liegt daher auf der y-Achse = Parabelachse a. Wegen $y'' = 2a$ ist der Scheitel ein **Tiefpunkt** für **$a > 0$**, die Parabel ist also nach oben offen, und ein **Hochpunkt** für **$a < 0$**, die Parabel ist nach unten offen. Im Punkt **Y(0/c)** schneidet die Parabel die y-Achse. Daher lässt sich aus a, b und c die Form der Parabel schon ziemlich gut herauslesen, mit Berechnung von S und unter Benützung von Y dann schon ganz exakt. Die **quadratische Potenzfunktion** $y = ax^2$ ist wegen S(0/0) = Y ein Sonderfall, hier muss noch mindestens ein Punkt berechnet werden.

Praktische Anwendungen:

a) Quadratische Weg-Zeit-Funktion: $s = ax^2 + bx + c$ beschreibt (wegen $s'' = 2a$) einen Bewegungsvorgang mit konstanter Beschleunigung. Ein konkretes Beispiel dazu ist der **lotrechte Wurf:** Ein Gegenstand wird lotrecht mit einer *Anfangsgeschwindigkeit* v_0 von einer *Ausgangshöhe* h_0 nach oben geworfen bzw. geschossen. Der damit erzielbaren Höhe h (= $h_0 + v_0.t$) steht die Erdanziehung mit $\frac{g}{2}.t^2$ entgegen, sodass die Funktionsgleichung für den Gesamtvorgang

$$\boxed{(1) \quad h(t) = h_0 + v_0.t - \frac{g}{2}.\, t^2}$$

lautet. Darin ist $g \approx 9{,}81$ m/sek^2 die *Fallbeschleunigung*, die angibt, welche Beschleunigung ein Körper (unabhängig von seiner Masse und unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes) im freien Fall erreicht ($h'' = -g$). Eine Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ hat für $a = -\frac{g}{2} < 0$ eine nach unten offene Parabel (2. Grades) zur Funktionskurve, die (für $t_1 = 0$) im Punkt $A(0/h_0)$ ihren Ausgang nimmt. Ist $E(t_2/h_0)$ der zweite Punkt mit dieser Höhe, dann ist t_2 die Zeit, bis der Gegenstand zur Ausgangshöhe zurückkehrt und h_{max} muss die h-Koordinate des Parabelscheitel S sein, und dieser liegt an der Stelle $t_2/2$, wie die folgende Zeichnung zeigt:



Für $h_0 > 0$ ist allenfalls noch die Zeit interessant, zu der das hochgeschleuderte Objekt am Erdboden (h = 0) auftrifft. Laut Graphik ist das die t-Kordinate t_3 des Punktes V. Sie ist die positive Lösung der Gleichung $-\frac{g}{2}.t^2 + v_0.t + h_0 = 0$.

b) Zahlreiche geom. Formeln zur Flächenberechnung, z. B. $A_{Quadrat} = a^2$ oder $A_{Kreis} = r^2\pi$ (Flächeninhalt A = y abhängig von der Länge a = x oder r = x), aber auch Volumina von Prismen, Pyramiden, Zylindern und Kegeln mit konstanter Höhe, z. B. $V = r^2.\pi.h$ (y = V, x = r, h konstant).

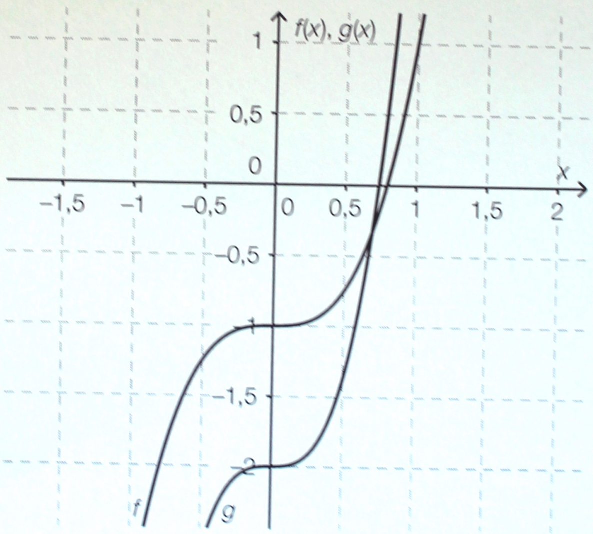
3. Polynomfunktionen dritten und höheren Grades:

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b$. Daraus folgen **zwei oder kein Scheitel**, aber **jedenfalls ein Wendepunkt.** Für $a > 0$ verläuft die Kurve von links unten nach rechts oben, für $a < 0$ von links oben nach rechts unten. Schnittpunkt mit der y-Achse ist Y(0/d).

$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, $y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c$. Daraus folgen **maximal drei, aber eventuell auch nur ein Scheitel** und **zwei oder null Wendepunkte**. Für $a > 0$ kommt die Kurve von links oben und geht nach rechts oben, für $a < 0$ umgekehrt. Für $b = d = 0$ spricht man von einer **geraden Funktion**; deren Graphen sind zur y-Achse symmetrische Kurven.

Mat. 17/1. NT/Aufg. 1/09:

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen zweier reeller Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = a \cdot x^3 + b$ und $g(x) = c \cdot x^3 + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.



Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die Parameter a, b, c und d zu? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$a > c$	☐
$b > d$	☐
$a > 0$	☐
$b > 0$	☐
$c < 1$	☐

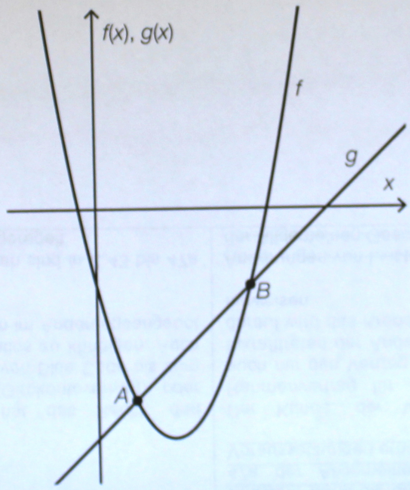
Mat. 14/2. NT/Aufg. 1/10:

Der Graph einer zur senkrechten Achse symmetrischen Polynomfunktion *f* besitzt den lokalen Tiefpunkt $T = (3|–2)$. Aufgabenstellung: Begründen Sie, warum die Polynomfunktion *f* mindestens 4. Grades sein muss!

Mat. 17/HT/Aufg. 1/11:
Gegeben ist die Gleichung einer reellen Funktion *f* mit $f(x) = x^2 - x - 6$. Einen Funktionswert $f(x)$ nennt man negativ, wenn $f(x) < 0$ gilt. Aufgabenstellung: Bestimmen Sie alle $x \in$ R, deren zugehöriger Funktionswert $f(x)$ negativ ist!

Mat. 17/2. NT/Aufg. 1/08:

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Funktion *f* mit $f(x) = x^2 - 4 \cdot x - 2$ und der Graph der Funktion *g* mit $g(x) = x - 6$ dargestellt sowie deren Schnittpunkte *A* und *B* gekennzeichnet.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koeffizienten *a* und *b* der quadratischen Gleichung $x^2 + a \cdot x + b = 0$ so, dass die beiden Lösungen dieser Gleichung die *x*-Koordinaten der Schnittpunkte *A* und *B* sind!

5. Exponentialfunktionen

Inhalte laut Anforderungsprofil:

1. Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktionen erkennen/betrachten und zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können. Zusammengehörige Werte(paare) ermitteln können. Die Begriffe Halbwertszeit und Verdopplungszeit kennen und im Kontext deuten können. Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können. **Dafür reicht die Betrachtung geometrischer Folgen („diskretes Wachstum") völlig aus!**

2. Die Wirkung der Parameter a und b bzw. λ (in $y = a.b^x$ bzw. $y = a.e^{\lambda.x}$ mit a, b $\in$ R^+ und $\lambda \in R \backslash \{0\}$) kennen und deuten können, Halbwerts- und Verdopplungszeit berechnen können, wichtige Eigenschaften wie $f(x+1) = b.f(x)$ und $(e^x)' = e^x$ kennen und im Kontext deuten können. **Dafür sind Kenntnisse über die Zahl e sowie Logarithmen erforderlich!**

1. Diskretes Wachstum

Die Definitionsmenge ist $N_0 = N \cup \{0\} = Z \backslash N^{minus}$, die Funktionswerte bilden geometrische Folgen.

Musterbeispiel: Die Anzahl der Seerosen in einem Teich verdoppelt sich täglich. (Die Verdopplungszeit beträgt einen Tag.) Am Beginn (n = 0) sind 5 Seerosen vorhanden. Gib eine Formel für die Anzahl A_n der Seerosen nach n Tagen an. Skizziere den Graphen der Funktion $n \rightarrow A_n$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_n	5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560

Die A_n bilden eine geom. Folge mit 5 als Anfangsglied und 2 als Quotient: $A_1 = 5.2^1$, $A_2 = 5.2^2$, $A_3 = 5.2^3$, ... allg. $A_n = 5.2^n$. Die allg. Funktionsgleichung lautet $y = a.b^x$ mit $x \in \mathbf{N_0}$ mit a = 5 (Ausgangswert) und b = 2 (Basis) einer Exponentialfunktion. Der (aus Punkten bestehende) Graph wächst sehr schnell, die y-Werte verdoppeln sich von Schritt zu Schritt, also um je 100 %.

<u>Zinseszinsrechnung:</u> Ein Kapital K_0 = 1000 € wird zu 15 % Zinsen jährlich angelegt Gesucht Tabelle für n = 1, 2 ... n, Gleichung und Graph der Funktion $n \rightarrow K_n$. Die Verdopplungszeit kann näherungsweise einer Wertetabelle entnommen oder auch berechnet werden, wobei in diesem Fall letztlich aber doch auf ganze n gerundet werden muss.

$K_1 = K_0 + 0{,}15.K_0 = K_0.1{,}15^1$, $\quad K_2 = K_1 + 0{,}15.K_1 = K_1.1{,}15 = K_0.1{,}15^2 \quad \Rightarrow \quad K_n = K_0.1{,}15^n$

n	0	1	2	3	4	5	6
K_n	1000	1150	1322,5	1520,88	1749,01	2011,36	2313,06

Geometrische Folge mit Aufzinsungsfaktor q = 1,15 (= Basis der Exponentialfunktion). Im Graph wachsen die y-Werte pro Schritt um jeweils 15 % gegenüber dem vorhergehenden Wert.

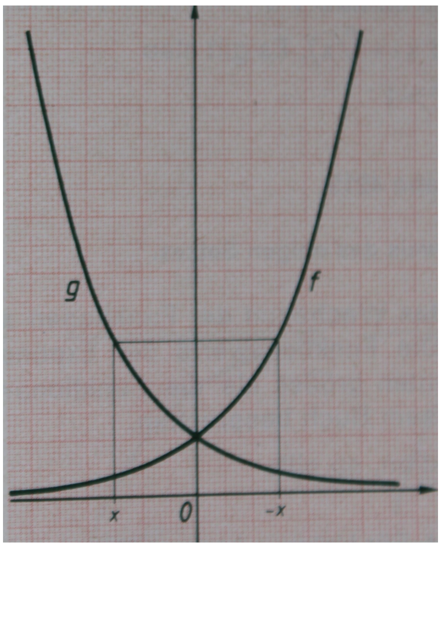
<u>2. Negatives Wachstum</u> ist konkret z. B. beim (inzwischen nicht mehr aktuellen) „Waldsterben" (die Waldfläche in Ö. nimmt von einem Ausgangsbestand A_0 - in km^2 - jährlich um p % ab) oder beim „Bauernsterben" (die Anzahl der landwirtschaftlichen Betriebe nimmt in Ö. von einem Ausgangsbestand A_0 jährlich um p % ab) gegeben. Halbwertszeit bedeutet den Zeitraum, in dem der Bestand auf $A_0/2$ absinkt.

Die geom. Folgen sind monoton fallend bzw. Nullfolgen, die Formeln lauten $A_n = A_0.(1-\frac{p}{100})^n$, z. B. für p = 3 % gilt $A_n = A_0.0{,}97^n$. Halbwertszeit für $0{,}97^n = 0{,}5$, Lösung durch Probieren: $0{,}97^{22} = 0{,}511...$ und $0{,}97^{23} = 0{,}496...$, also liegt die Halbwertszeit zwischen 22 und 23 Jahren.

<u>3. Kontinuierliches (stetiges) Wachstum</u>

Eine Funktion mit der Gleichung $y = a.b^x$ ($a, b \in R^+$) heißt Exponentialfunktion und hat die Definitionsmenge R, bei praktischen Anwendungen eingeschränkt auf $R^+ \cup \{0\}$ mit $a = A_0$ (Anfangswert). Die Funktionskurven enthalten den Punkt Y(0/a) und sind (streng) monoton wachsend für b > 1 bzw. streng monoton fallend für b < 1 mit der x-Achse als Asymptote. Für b = 1 handelt es sich um die konstante Funktion mit der Gleichung y = a als Sonderfall.

Die Zeichnung zeigt $f(x) = 2^x$ und $g(x) = (0{,}5)^x$ und insbesondere die Punkte an den Stellen ±1,5: $f(1{,}5) = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} \approx 2{,}832$, $g(-1{,}5) = (0{,}5)^{-3/2} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} \approx 2{,}832$.



Die Funktionskurven für $y = ab^x$ und $y = a.(1/b)^x$ sind symmetrisch zur y-Achse und laufen (für alle b!) durch den Punkt Y(0/a).

Für alle Exponentialfunktionen $x \rightarrow a.b^x$ gilt wegen $a.b^{x+1} = a.b^x.b$ die Beziehung **f(x+1) = b.f(x),** das bedeutet, dass sich die Funktionswerte mit jedem „Einserschritt" bei den x-Werten auf das b-Fache erhöhen bzw. (für b < 1) vermindern. *(Wozu wird dieses Wissen gebraucht?)*

4. Logarithmen:

Der Logarithmus $^b\log(x)$ einer Zahl x zur Basis $b \in B = \{b \in R / b > 1)$ ist jene zu b gehörige Hochzahl, welche x ergibt. x heißt Numerus von $^b\log(x)$. Für jede Basis gilt $^b\log(b) = 1$.

Also: Wenn $x = b^y$, dann ist $y = {}^b\log(x)$. Probe: b^y muss x ergeben! Z. B. folgt aus $8 = 2^3 \Leftrightarrow 3 = {}^2\log 8$, aus $125 = 5^3 \Leftrightarrow 3 = {}^5\log 125$ und aus $10000 = 10^4 \Leftrightarrow 4 = {}^{10}\log 10000 = \log 10000$. (Wenn keine Basis angegeben ist, dann gilt b = 10.)

Die (historische) Bedeutung des „Zehnerlogarithmus" besteht in Folgendem: Zu den Numeri u und v existiert jeweils genau ein log(u) und genau ein log(v), wobei gilt: $u = 10^{\log(u)}$ und $v = 10^{\log(v)} \Rightarrow u.v = 10^{\log(u)}.10^{\log(v)} = 10^{\log(u) + \log(v)}$ (nach der Regel $a^x.a^y = a^{x+y}$). Bei einem Quotienten u/v ergibt sich analog der Wert $10^{\log(u) - \log(v)}$. Man kann also die Multiplikation bzw. Division zweier (unhandlicher) Dezimalzahlen u, v ausführen, indem man in sogenannten Logarithmentafeln die zugehörigen Logarithmen aufsucht, diese addiert bzw. subtrahiert und dann das Ergebnis „entlogarithmiert", also über die Tafeln zum zugehörigen Numerus zurückkehrt. Analog lässt sich (wegen $(a^x)^y = a^{x.y}$) die Potenz $u^x = (10^{\log(u)})^x = 10^{\log(u).x}$ berechnen, indem log(u).x delogarithmiert wird.

Daraus folgen für jede Basis unmittelbar die Regeln

$^b\log(u.v) = {}^b\log(u) + {}^b\log(v)$ sowie **$^b\log(u/v) = {}^b\log(u) - {}^b\log(v)$** und **$^b\log(u^x) = x.{}^b\log(u)$**

Vor allem die dritte Regel ist für das **Auflösen von Exponentialgleichungen** von großem Nutzen, wie es etwa beim Berechnen einer Halbwertszeit benötigt wird. Siehe das Beispiel vom Wald- oder Bauernsterben mit 3 % jährlich (Seite 17): $0,5 = (1 - 0,03)^t = 0,97^t \Rightarrow \log(0,5) = \log(0,97^t) = t.\log(0,97) \Rightarrow t = \log(0,5) : \log(0,97) = 22,756...$ (TR)

Bei der Verdopplungszeit (mit b > 1) ist anstelle von log(0,5) der log(2) zu verwenden.

Mat. 2018/1. NT/Aufg. 1/12: Die Masse m(t) einer radioaktiven Substanz kann durch eine Exponentialfunktion in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden. Zu Beginn der Messung sind 100 mg der Substanz vorhanden, nach 4 Stunden misst man noch 75 mg dieser Substanz. Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Halbwertszeit t_H dieser Substanz in Stunden.

$m(t) = m(0).b^t$ mit $m(0) = 100$ und $m(4) = 75 \Rightarrow 75 = 100.b^4 \Rightarrow b^4 = 0,75 \Rightarrow b = \sqrt[4]{0,75}$

$0,5.m(0) = m(0).0,75^{\frac{t}{4}} \Rightarrow \frac{t}{4}.\log 0,75 = \log 0,5 \Rightarrow t = 4.\frac{\log 0,5}{\log 0,75} = 9,63768...$ Stunden

Probe: $100.\sqrt[4]{0,75}^{\,9,638} = 49,99886...$

5. Die EULERsche Zahl e und Natürliche Logarithmen

e = 2,71828... (TR) ist der Grenzwert einer Folge mit dem Bildungsgesetz $a_n = (1 + 1/n)^n$, symbolisch $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, die sehr langsam konvergiert, z. B. $a_{1000} = 2,71692...$ (TR).

e ist aber auch die Summe der unendl. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+...$ Die ersten sechs Glieder ergeben bereits die Summe 2,71666... (TR).

1. Die große (theoretische) Bedeutung der Exponentialfunktion $y = e^x$ besteht darin, dass sämtliche Ableitungen wiederum e^x ergeben und alle ihre Stammfunktionen $e^x + C$ lauten. Wegen $y' = e^x$ sind die Steigungen der Funktionskurve stets so groß wie die entspr. Funktionswerte.

2. Die Logarithmen zur Basis e heißen **Natürliche Logarithmen**, symbolisch mit ln(x) bezeichnet. Besonders wichtig dabei ist die Beziehung **ln(e) = 1.**

3. Zu jeder Exponentialfunktion $y = b^x$ gibt es eine Zahl $\lambda > 0$, sodass $b^x = e^{\lambda x}$ ist, woraus für deren Ableitungen $y' = \ln(b).e^x$ und für deren Stammfunktionen $\int b^x.dx = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$ folgt.

Beweis: $b^x = e^{\lambda.x}$, d. h. $b = e^{\lambda}$ und daher $\ln(b) = \lambda.\ln(e) = \lambda \Rightarrow y = b^x = (e^{\ln(b)})^x = e^{\ln(b).x}$. Daraus folgt nach der Kettenregel $y' = e^{\ln(b).x}.\ln(b)$ und durch „Rückwärtseinsetzen" $y' = \ln(b).b^x$. Hinsichtlich der Stammfunktion gilt $\int b^x.dx = \int e^{\ln(b).x}.dx = \int e^u.\frac{du}{\ln(b)} = \frac{1}{\ln(b)}.e^u + C = \frac{e^{\ln(b).x}}{\ln(b)} + C = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$ nach der Substitutionsregel.

Mat. 18/1. NT/Aufg. 1/11: Für eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = 5.\ e^{\lambda x}$ gilt: $f(x + 1) = 2.\ f(x)$. Aufgabenstellung: Geben Sie den Wert von λ an.

$5.\ e^{\lambda.(x+1)} = 2.5.\ e^{\lambda x} \Rightarrow e^{\lambda.x+\lambda} = 2.\ e^{\lambda x} \Rightarrow e^{\lambda x}.\ e^{\lambda} = 2.\ e^{\lambda x} \Rightarrow e^{\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = \ln(2)$.

6. Logarithmusfunktionen:

... sind die Umkehrfunktionen der wachsenden Exponentialfunktionen $y = a.b^x$ $(a > 0, b > 1)$.

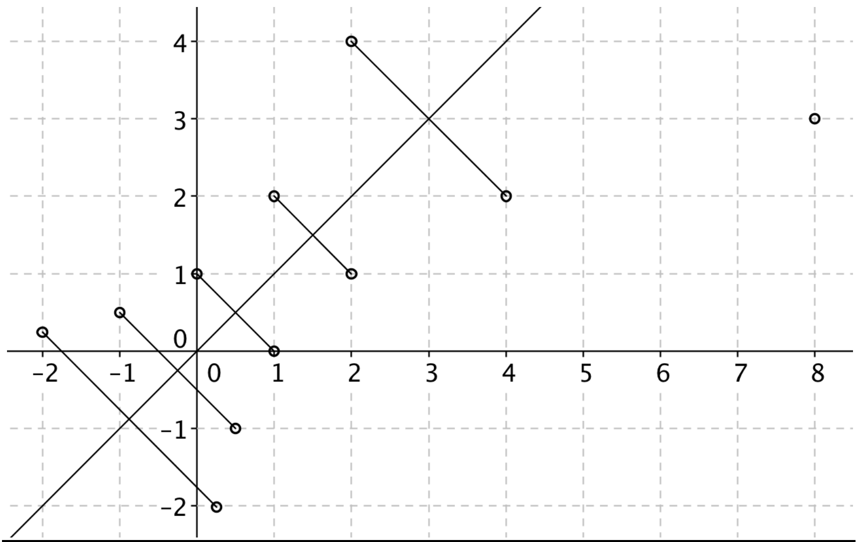
$y = a.b^x \Rightarrow x = {}^b\log(y/a)$: x ist jene Hochzahl, die auf die Basis b gesetzt, y/a ergibt. Durch Vertauschen von x und y folgt daraus $y = {}^b\log(x/a) = {}^b\log(x) - {}^b\log(a)$, was insbesondere für a = 1 wegen ${}^b\log(1) = 0$ die Funktionsgleichung $\boldsymbol{y = {}^b\log(x)}$ ergibt. Definitionsmenge $D = \boldsymbol{R}^+$

<u>Beispiel:</u> Zu $y = 2^x$ lautet die Umkehrfunktion $y = {}^2\log(x)$

Wertetabelle:

x	*0,25*	*0,5*	*1*	*2*	*4*	*8*
y	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*

Die Kurve hat die y-Achse zur Asymptote, sie steigt streng monoton, aber immer langsamer an. Bei praktischen Anwendungen spricht man von einem logarithmischen Wachstum.



7. Weitere Maturabeispiele (ungeordnet):

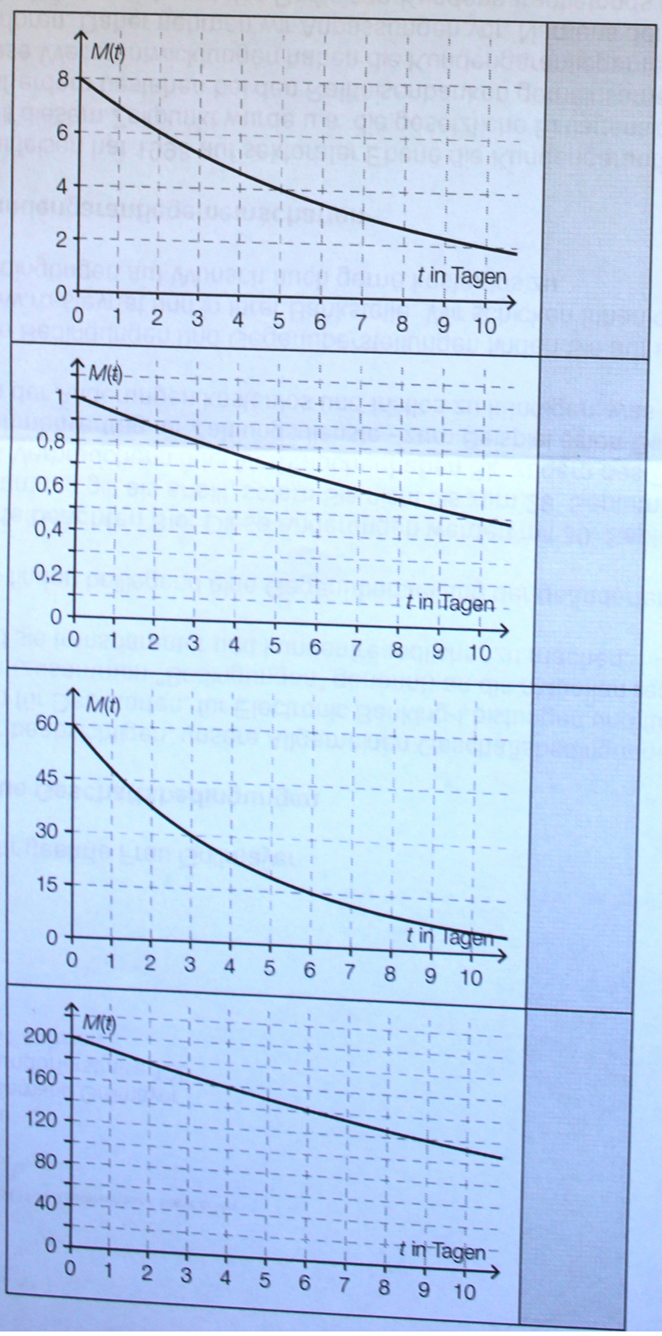
Mat. 18/2. NT/Aufg. 1/11:
In der Medizintechnik werden Röntgenstrahlen eingesetzt. Durch den Einbau von Bleiplatten in Schutzwänden sollen Personen vor diesen Strahlen geschützt werden. Man geht davon aus, dass pro 1 mm Dicke der Bleiplatte die Strahlungsintensität um 5 % abnimmt. Aufgabenstellung: Berechnen Sie die notwendige Dicke *x* (in mm) einer Bleiplatte, wenn die Strahlungsintensität auf 10 % der ursprünglichen Strahlungsintensität, mit der die Strahlen auf die Bleiplatte auftreffen, gesenkt werden soll! (Anleitung: $1 = b^0$)

Mat. 17/2. NT/Aufg. 1/11:

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen von Exponentialfunktionen, die jeweils die Abhängigkeit der Menge einer radioaktiven Substanz von der Zeit beschreiben.
Dabei gibt $M(t)$ die Menge (in mg) zum Zeitpunkt t (in Tagen) an.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die entsprechende Halbwertszeit (aus A bis F) zu!

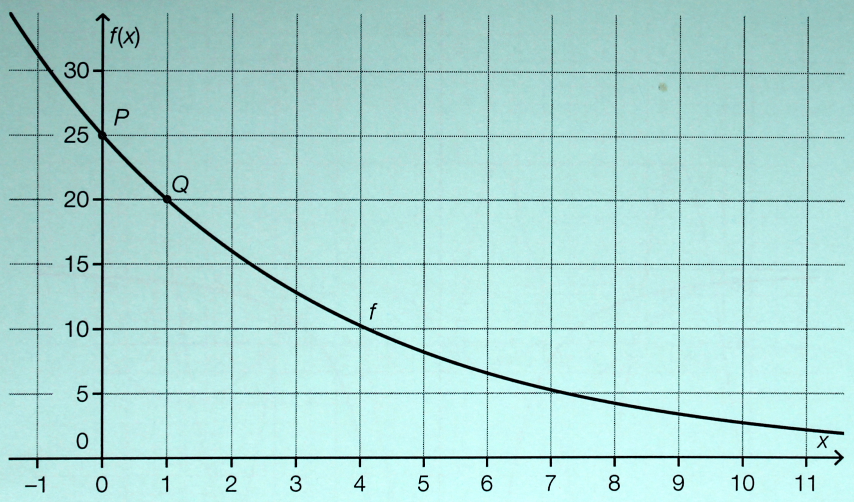


A	1 Tag
B	2 Tage
C	3 Tage
D	5 Tage
E	10 Tage
F	mehr als 10 Tage

Mat. 15/HT/Aufgabe 1/11:
Für eine medizinische Untersuchung wird das radioaktive Isotop Technetium künstlich hergestellt. Dieses Isotop hat eine Halbwertszeit von 6,01 Stunden. Aufgabenstellung: Geben Sie an, wie lange es dauert, bis von einer bestimmten Ausgangsmenge Technetiums nur noch ein Viertel vorhanden ist!

Mat. 15/1. NT/Aufg. 1/11:

Gegeben ist der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ durch die Punkte $P = (0|25)$ und $Q = (1|20)$.

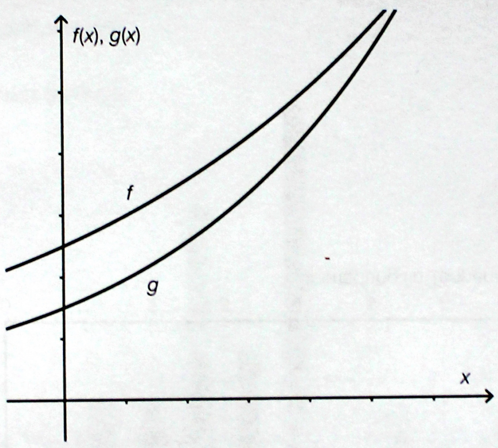


Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung der dargestellten Exponentialfunktion f an!

Mat. 16/HAT/Aufg. 1/12:

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen zweier Exponentialfunktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = c \cdot a^x$ und $g(x) = d \cdot b^x$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

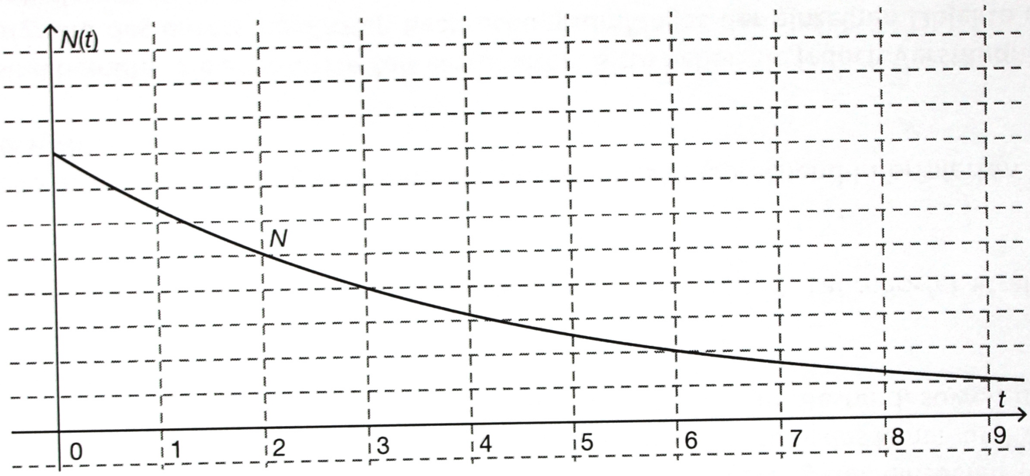
Für die Parameter a, b, c, d der beiden gegebenen Exponentialfunktionen gelten die Beziehungen ___①___ und ___②___.

①	
$c < d$	☐
$c = d$	☐
$c > d$	☐

②	
$a < b$	☐
$a = b$	☐
$a > b$	☐

Mat. 14/HAT/Aufg. 1/07:

Der unten abgebildete Graph einer Funktion N stellt einen exponentiellen Zerfallsprozess dar; dabei bezeichnet t die Zeit und $N(t)$ die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge des zerfallenden Stoffes. Für die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene Menge gilt: $N(0) = 800$.



Mit t_H ist diejenige Zeitspanne gemeint, nach deren Ablauf die ursprüngliche Menge des zerfallenden Stoffes auf die Hälfte gesunken ist.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$t_H = 6$	☐
$t_H = 2$	☐
$t_H = 3$	☐
$N(t_H) = 400$	☐
$N(t_H) = 500$	☐

Mat. 14/2. NT/Aufg. 1/11:

Von einer Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 25 \cdot b^x$ ($b \in \mathbb{R}^+$; $b \neq 0$; $b \neq 1$) ist folgende Eigenschaft bekannt: Wenn x um 1 erhöht wird, sinkt der Funktionswert auf 25 % des Ausgangswertes. Aufgabenstellung: Geben Sie den Wert des Parameters b an!

6. Sinusfunktion und Cosinusfunktion

Diese ordnen jedem Winkel im rechtw. Dreieck als Sinus das Verhältnis (Länge der) Gegenkathete : (L. d.) Hypotenuse und als Cosinus das Verhältnis (L. d.) Ankathete : (L. d.) Hypotenuse zu. Für die „Auflösung" rechtw. Dreiecke reicht diese Definition, *allenfalls ergänzt um den Tangens = (L. d.) Gegenkathete : (L. d.) Ankathete.*

Bei der „Auflösung" schiefwinkliger Dreiecke, insbes. bei entsprechenden „Vermessungsaufgaben" wird der *Sinussatz* und/oder der *Cosinussatz* benötigt und es muss eine Erweiterung der Begriffe auf Winkel bis zu 180° erfolgen. Im Rahmen der Funktionenlehre wird beim Winkel generell das **Bogenmaß** verwendet, in dem dem Gradmaß 360° der Zahlenwert 2π entspricht, und die Definitionsmenge wird beim Sinus und beim Cosinus auf die Menge **R** aller reellen Zahlen erweitert, *beim Tangens auf alle* $x \in \mathbf{R}$ *mit Ausnahme aller Werte* $x = \frac{\pi}{2}.(2k-1)$ *für alle* $k \in Z$.

Aus nebenstehender Figur ist die **Erweiterung auf beliebige Winkelwerte** zu entnehmen. Die Figur zeigt den Einheitskreis $k_1[M = U; r = 1]$ und auf k_1 die Punkte P_1 im ersten, P_2 im zweiten, P_3 im dritten und P_4 im vierten **Quadranten** des Systems Uxy. Nach den oben genannten Grundregeln sind deren y-Koordinaten die Sinuswerte und deren x-Koordinaten sind die Cosinuswerte der Winkel φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4. *Die y-Koordinate des über dem Punkt X(1, 0) auf dem zweiten Winkelschenkel von* φ *liegenden Punktes T ist nach der Regel „Tangens = Gegenkathete : Ankathete" der Tangenswert von* $\varphi < 90°$.

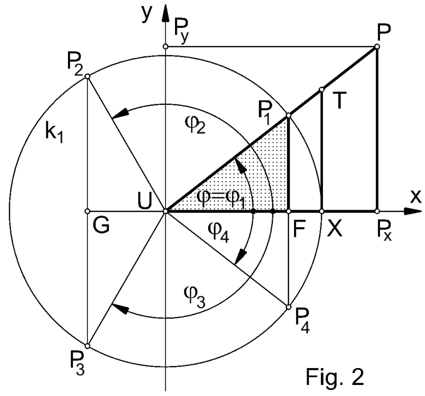


Fig. 2

Beachte: In der Figur sind die Winkel im dritten und vierten Quadranten im Uhrzeigersinn eingezeichnet und daher mit negativem Vorzeichen zu versehen. An den Funktionswerten ändert sich aber nichts, wenn alle Winkel von der positiven x-Achse aus positiv gemessen würden, d. h. $\sin\varphi_3 = \sin(360° + \varphi_3)$**,** $\cos\varphi_4 = \cos(360° + \varphi_4)$ **usw.**

Dem „gepunkteten" Dreieck und dem Pythagoräischen Lehrsatz ist unmittelbar die Fundamentalbeziehung $\mathbf{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1}$ zu entnehmen. *Und aus* $\cos\varphi : \sin\varphi = 1 : \tan\varphi$ *(Ähnlichkeit) ergibt sich* $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$. *Diese zwei Formeln erlauben es, aus* <u>*einem*</u> *Wert die beiden anderen abzuleiten. Außerdem gilt der obige Bruch als Definition des Tangenswerts ganz allgemein.* Daraus folgt:

1. Die Sinuswerte im 1. und 2. Quadranten sind positiv bzw. sin(0° od. 0) = sin(180° od. π) = 0, im 3. und 4. Quadranten negativ.

2. Die Cosinuswerte im 1. und 4. Quadranten sind positiv bzw. cos(90°od. π/2) = cos(-90° od. -π/2) = cos(270° od. 3π/2) = 0, im 2. und 3. Quadranten negativ.

3. Die Tangenswerte sind im 1. und 3. Quadranten positiv bzw. tan0° = tan180°(bzw. π) = 0, im 2. und 4. Quadranten negativ. Für $\varphi = \pm 90°$ *od.* $\pm\pi/2$ *bzw.* $\varphi = 270°$ *od. 3π/2) existiert kein Tangenswert.*

Diese drei Werte sind – einschließlich der inversen, welche ihnen die Winkel zuordnen – heutzutage auf jedem Taschenrechner verfügbar. (Der Cotangens ist als Kehrwert des Tangens ebenso einfach abrufbar.) Für die Sinuswerte von 0°(0), 30°(π/6), 45°(π/4), 60°(π/3) und 90°(π/2) ergeben sie sich aus dem gleichseitigen oder glsch. rechtw. Dreieck, wofür auch eine Merkregel gilt:

x	0° od. 0	30° od. π/6	45° od. π/4	60° od. π/3	90° od. π/2
y = sin x	½.√0 = 0	½.√1 = ½	½.√2	½.√3	½.√4 = 1

Daraus ergeben sich die Cosinuswerte nach der Fundamentalbeziehung (oder auch direkt):

x	0°(0)	30°(π/6)	45°(π/4)	60°(π/3)	90°(π/2)
y = cos x	½.√4 = 1	½.√3	½.√2	½.√1 = 1/2	½.√0 = 0

Und daraus wieder folgen die Tangenswerte nach der Regel tan x = (sin x) : (cos x)

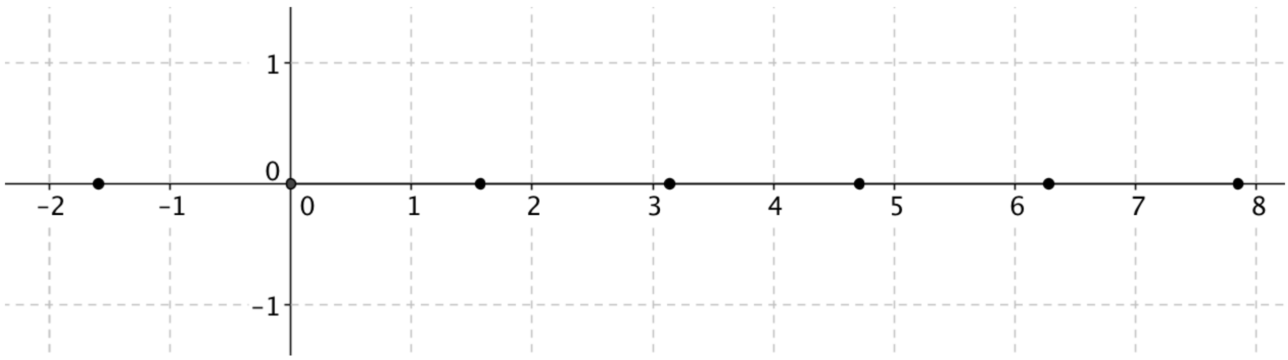
x	*0°(0)*	*30°(π/6)*	*45°(π/4)*	*60°(π/3)*	*90°(π/2)*
y = tan x	*0*	*1/3.√3*	*1*	*√3*	*Nicht definiert*

<u>Ableitungsfunktionen und Stammfunktionen</u>:

f(x) = sin (x) ⇒ f'(x) = cos (x) und F(x) = -cos(x) + C
f(x) = cos (x) ⇒ f'(x) = -sin(x) und F(x) = sin(x) + C

Die Wertetabellen von y = sin x, y = sin (x + π/2) = cos x und von y = -sin x in π/2-Schritten zwischen -π/2 und 5π/2 lautet:

X	-π/2	0	π/2	π	3/2π	2π	5π/2
sin x	-1	0	1	0	-1	0	1
cos x	0	1	0	-1	0	1	0
-sin x	1	0	-1	0	1	0	-1



Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen die Hoch- und Tiefpunkte, die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen die Wendepunkte. Die Steigungen der Wendetangenten sind 1 oder -1.

Die Funktionskurven des sin x und des cos x schneiden einander bei π/4 (y = √2/2 ≈ 0,7), 5π/4 (y ≈ -0,7) und 9π/4 (y ≈ 0,7), die des –sin x und des cos x bei 3π/4 (y ≈ -0,7) und bei 7π/4 (y ≈ 0,7).

<u>Harmonische Schwingungen</u>

Alle Funktionskurven zu y = a.sin(b.x + c) werden Sinuslinien genannt und beschreiben „harmonischen Schwingungen" (Physik). Dabei gibt a die *Amplitude*, das ist die y-Koordinate der Hoch- und Tiefpunkte, und b, die *Kreisfrequenz*, bestimmt die *Periode* (= Länge L <u>einer</u> Schwingung) nach der Formel b.L = 2π. (L und b sind verkehrt proportional.)

Für c ≠ 0 erfolgt eine *Phasenverschiebung* V gegenüber der Schwingung y = a.sin(bx), deren Kurve durch U(0/0) geht, und zwar um die Lösung der Gleichung bV + c = 0, für V < 0 nach links und für V > 0 nach rechts. *Bei den Maturaaufgaben kommt nur der Sonderfall c = π/2 vor:*

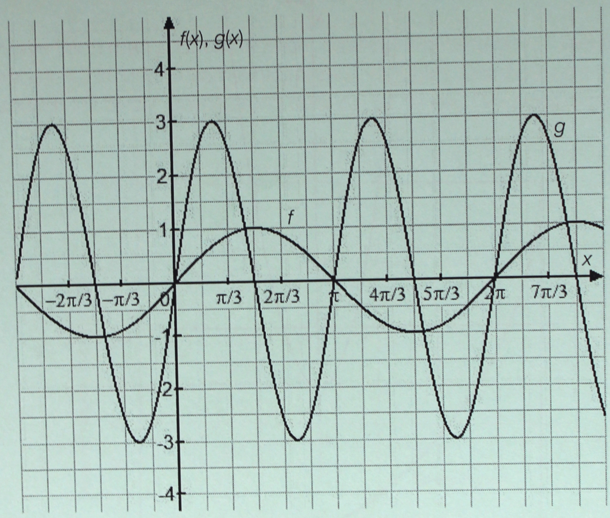
y = sin(x + π/2) = cos x

Mat. 18/HT/Aufg. 1/12:

Für *a*, *b* ∈ R^+ sei die Funktion *f*: R → R mit *f*(*x*) = *a* · sin(*b* · *x*) für *x* ∈ R gegeben. Die beiden nachstehenden Eigenschaften der Funktion *f* sind bekannt: (1) Die (kleinste) Periode der Funktion *f* ist π. (2) Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert von *f* beträgt 6. Aufgabenstellung: Geben Sie *a* und *b* an!

Mat. 14/2. NT/Aufg. 1/12:

Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen von zwei Funktionen f und g, deren Gleichungen den Funktionsterm $a \cdot \sin(b \cdot x)$ haben ($a, b \in \mathbb{R}^+\setminus\{0\}$). Dabei wird a als Amplitude und b als Kreisfrequenz bezeichnet.



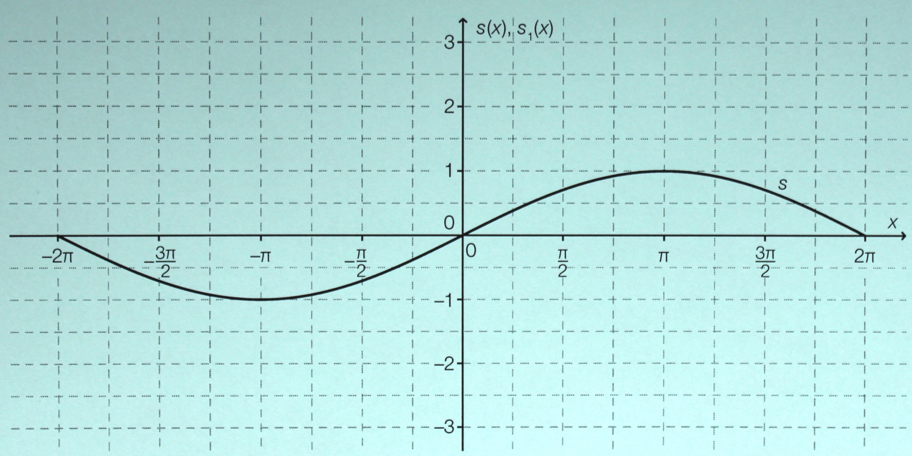
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Amplitude von g ist dreimal so groß wie die Amplitude von f.	☐
Würde man die Kreisfrequenz von f verdreifachen, so wäre der neue Graph mit jenem von g deckungsgleich.	☐
Die Kreisfrequenz von f beträgt 1.	☐
Die Kreisfrequenz von g ist doppelt so groß wie die Kreisfrequenz von f.	☐
Eine Veränderung des Parameters a bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Funktion in senkrechter Richtung.	☐

Mat. 15/2. NT/Aufg. 1/12:

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion s mit der Gleichung $s(x) = c \cdot \sin(d \cdot x)$ mit $c, d \in \mathbb{R}^+$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.

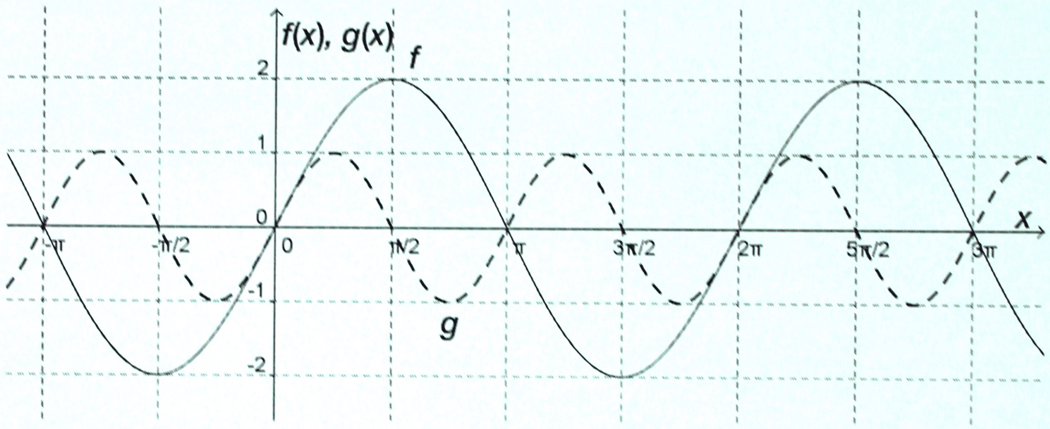


Aufgabenstellung:

Erstellen Sie im obigen Koordinatensystem eine Skizze eines möglichen Funktionsgraphen der Funktion s_1 mit $s_1(x) = 2c \cdot \sin(2d \cdot x)$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.

Mat. 14/HT/Aufg. 1/12:

Im untenstehenden Diagramm sind die Graphen zweier Funktionen f und g dargestellt.



Die Funktion f hat die Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit den reellen Parametern a und b. Wenn diese Parameter in entsprechender Weise verändert werden, erhält man die Funktion g.

Aufgabenstellung:

Wie müssen die Parameter a und b verändert werden, um aus f die Funktion g zu erhalten?

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Um den Graphen von g zu erhalten, muss a ______①______ und b ______②______ .

①	
verdoppelt werden	☐
halbiert werden	☐
gleich bleiben	☐

②	
verdoppelt werden	☐
halbiert werden	☐
gleich bleiben	☐

7. Verschiedene (z. T. „übergreifende“) Aufgaben

Mat. 18/1. NT/Aufg. 1/09:

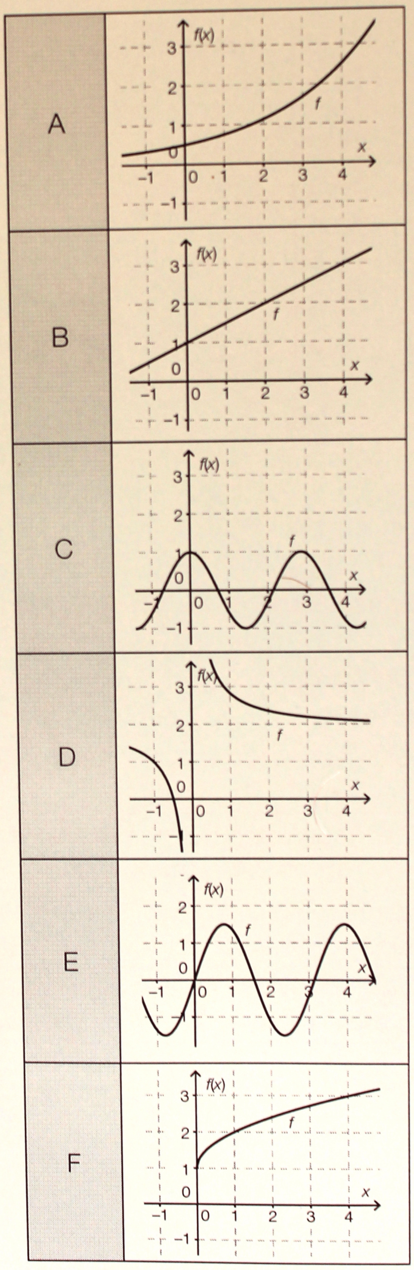
Verbal gegebene Zusammenhänge können in bestimmten Fällen als lineare Funktionen betrachtet werden. Aufgabenstellung: Welche der folgenden Zusammenhänge lassen sich mittels einer linearen Funktion beschreiben? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Zusammenhänge an!

Die Wohnungskosten steigen jährlich um 10 % des aktuellen Wertes.	
Der Flächeninhalt eines quadratischen Grundstücks wächst mit zunehmender Seitenlänge.	
Der Umfang eines Kreises wächst mit zunehmendem Radius.	
Die Läge einer 17 cm hohen Kerze nimmt nach dem Anzünden in jeder Minute um 8 mm ab	
In einer Bakterienkultur verdoppelt sich stündlich die Anzahl der Bakterien.	

Mat. 17/1. NT/Aufg. 1/07:

Ordnen Sie den vier Funktionsgleichungen jeweils den passenden Graphen (aus A bis F) zu!

$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	
$f(x) = a \cdot b^x$	
$f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$	
$f(x) = a \cdot x + b$	



Bemerkung dgm: Mit Ausnahme der Exponentialfunktion lässt sich überall a und b angeben.

Mat. 18/1. NT/Aufg. 1/10:

Gegeben ist eine Polynomfunktion f: R → R mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ ($a, b, c, d \in$ R; $a \neq 0$). Aufgabenstellung: Nachstehend sind Aussagen über die Funktion f gegeben. Welche dieser Aussagen trifft/treffen für beliebige Werte von $a \neq 0$, b, c und d auf jeden Fall zu? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Funktion f hat mindestens einen Schnittpunkt mit der x-Achse.	
Die Funktion f hat höchstens zwei lokale Extremstellen.	
Die Funktion f hat höchstens zwei Punkte mit der x-Achse gemeinsam.	
Die Funktion f hat genau eine Wendestelle.	
Die Funktion f hat mindestens eine lokale Extremstelle.	

Mat. 14/1. NT/Aufg. 1/08:

Gegeben sind vier Funktionstypen. Für alle unten angeführten Funktionen gilt: $a \neq 0$; $b \neq 0$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Funktionstypen jeweils die passende Eigenschaft (aus A bis F) zu!

lineare Funktion f mit $f(x) = a \cdot x + b$	
Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$)	
Wurzelfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$	
Sinusfunktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	

A	Die Funktion f ist für $a > 0$ und $0 < b < 1$ streng monoton fallend.
B	Die Funktion f besitzt genau drei Nullstellen.
C	Die Funktion f besitzt in jedem Punkt die gleiche Steigung.
D	Der Graph der Funktion f besitzt einen Wendepunkt im Ursprung.
E	Die Funktion f ist für $b = 2$ konstant.
F	Die Funktion f ist nur für $x \geq 0$ definiert.

Mat. 18/2. NT/Aufg. 1/08:

Für ein Produkt sind die Kostenfunktion K mit $K(x) = 2 \cdot x + 4000$ und die Erlösfunktion E mit $E(x) = 10 \cdot x$ bekannt, wobei x die Anzahl der produzierten Mengeneinheiten ist und alle produzierten Mengeneinheiten verkauft werden. Kosten und Erlös werden jeweils in Euro angegeben. Der Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen ist $S = (500|5000)$. Aufgabenstellung: Interpretieren Sie die Koordinaten 500 und 5 000 des Schnittpunkts S im gegebenen Kontext! *Zusatzfrage von dgm: Wie lautet die Gleichung der Gewinnfunktion G(x)?*

Mat. 17/HT/Aufg. 1/8:

Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades hat im Punkt $T = (-3|1)$ ein lokales Minimum, in $H = (-1|3)$ ein lokales Maximum und in $W = (-2|2)$ einen Wendepunkt. Aufgabenstellung: In welchem Intervall ist diese Funktion linksgekrümmt (positiv gekrümmt)? Kreuzen Sie das zutreffende Intervall an!

$(-\infty; 2)$	
$(-\infty; -2)$	
$(-3; -1)$	
$(-2; 2)$	
$(-2; \infty)$	
$(3; \infty)$	