

Dieter Grillmayer:
Analysis

Vorwort

Dies ist der III. Teil einer Handreichung, die ich im Jahr 2019 für einen meiner Enkel ausgearbeitet habe, um ihm dabei behilflich zu sein, die schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (österr. Zentralmatura) zu bestehen. Sie umfasst daher auch nur ein Wissen und Können, das eine Voraussetzung für die Bewältigung der 24 Aufgaben des „Kernbereichs“ der schriftlichen Zentralmatura darstellt. (16 „Richtige“ reichen für eine positive Beurteilung der ganzen Zentralmatura aus.) Dieser Lehrstoff wurde im Auftrag des BMU von einer Projektgruppe zusammengestellt, in vier Teile gegliedert und inhaltlich kurz beschrieben. Aus jedem dieser vier Teile kommen genau sechs Aufgaben zur Zentralmatura.

Zu Beginn jedes der vier Teile habe ich die von der Projektgruppe erstellten ANFORDERUNGEN aufgelistet. Wo ich in meinen Ausarbeitungen ein wenig darüber hinausgegangen bin ist das im Text vermerkt bzw. *kursiv geschrieben*. Andererseits sind Sätze und Formeln vielfach ohne Beweis angegeben.

Meine damalige Arbeit ist nicht perfekt und wäre sicher auch noch ausbaufähig. Gleichwohl hielt ich sie aber schon in dieser Form für geeignet, einem größeren Kreis von AHS-Maturanten dienen zu können, nicht zuletzt deshalb, weil ich über 150 (das sind an die 40 %) der zwischen 2014 und 2019 gestellten Maturaaufgaben hineinkopiert habe. An ihnen ist auch erkennbar, auf welches Wissen und Können ganz konkret Wert gelegt wird. Darum habe ich die Handreichung nach deren Fertigstellung auch auf meine Website www.grillmayer-dieter.at gestellt und dort mit einem Vorwort versehen, das vor allem darauf hinweist, dass es sich wirklich nur um eine Handreichung zu dem bereits genannten Zweck, aber keineswegs um eine wissenschaftliche Arbeit handelt.

Leider habe ich erst vor ein paar Wochen bemerkt, dass die einzelnen Teile der Arbeit bei entsprechender Titeleingabe z. B. über google im Internet als selbständige PDF-Dateien abgerufen werden können, also ohne das auf meiner Website stehende Vorwort, das auf die Entstehung und die zweifellos damit verbundenen Mängel hinweist. Daher statte ich nunmehr jede der vier PDF-Dateien mit diesem Vorwort aus.

Zuletzt: Alle seit 2014 gegebenen Maturaaufgaben finden sich einschließlich der Lösungen im Internet unter verschiedenen Adressen, z. B. unter www.marthago.at/zentralmatura.

Garsten, am 5. Jänner 2022

Teil III: ANALYSIS

An Grundkompetenzen werden abgeprüft:

1. Änderungsmaße

AN 1.1 Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können

AN 1.2 den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differenzialquotient („momentane“ bzw. lokale Änderungsrate)* auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs kennen und diese Konzepte (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können

AN 1.3 den Differenzen- und Differenzialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differenzialquotienten beschreiben können

AN 1.4 das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können

Anmerkungen:

Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzenquotienten und durch Differenzialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Veränderungsmaße im jeweiligen Kontext. Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist auch die Berechnung von Differenzen- und Differenzialquotienten beliebiger (differenzierbarer) Funktionen möglich.

2. Regeln für das Differenzieren

AN 2.1 einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$, damit sollen wohl Polynomfunktionen gemeint sein, (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*)

3. Ableitungsfunktion/Stammfunktion

AN 3.1 die Begriffe *Ableitungsfunktion* und *Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können

AN 3.2 den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können

AN 3.3 Eigenschaften von Funktionen mithilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

Anmerkungen:

Der Begriff der *Ableitung(sfunktion)* soll verständlich und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden. Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist das Ableiten von Funktionen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Differenzierungsregeln eingeschränkt.

4. Summation und Integral

AN 4.1 den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können

AN 4.2 einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Konstanter Faktor, (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können

AN 4.3 das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Anmerkungen:

Analog zum Differenzialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext.

Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist die Berechnung von bestimmten Integralen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Integrationsregeln eingeschränkt.

AN 1.1 bis AN 1.4

1. Änderungsmaße

Aus dem Internet:

Die **absolute Änderung** entspricht der Differenz aus „oberem Wert“ minus „unterem Wert“. Sie hat - im Unterschied zur relativen bzw. prozentuellen Änderung - eine physikalische Einheit. Symbolisch: a) Bei monoton wachsenden Funktionen mit $b > a$: $\Delta f = f(b) - f(a)$ oder $\Delta y = y_2 - y_1$, b) bei monoton wachsenden Zahlenfolgen: $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

Die **relative bzw. prozentuelle Änderung** ist die absolute Änderung „bezogen auf den“ oder „relativ zum“ Grundwert. Sie hat keine physikalische Einheit. Bei der prozentuellen Änderung ist der Grundwert y_1 zugleich der 100% -Wert.

Mat. 17/HT/Aufgabe 13/1: Leistungsverbesserung

Drei Personen *A*, *B* und *C* absolvieren jeweils vor und nach einem Spezialtraining denselben Koordinationstest. Person *A* erreichte vorher 5 und nachher 8 Punkte, Person *B* vorher 15 und nachher 19 Punkte, Person *C* vorher 20 und nachher 35 Punkte. Aufgabenstellung: Wählen Sie aus den Personen *A*, *B* und *C* die beiden aus, die die nachstehenden Bedingungen erfüllen!

- Bei der ersten Person ist die absolute Änderung der Punktezahl größer als bei der zweiten.
- Bei der zweiten Person ist die relative Änderung der Punktezahl größer als bei der ersten Person.

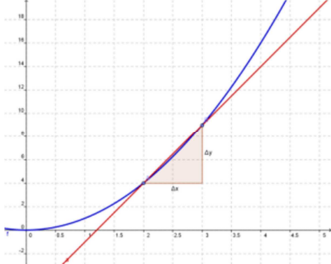
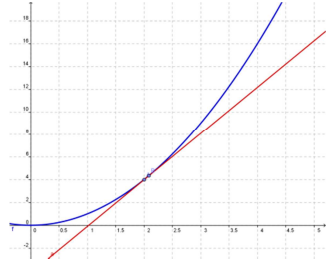
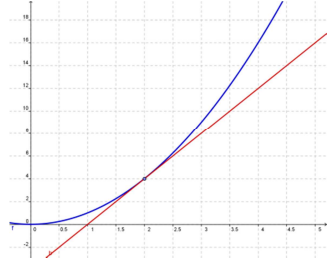
Lösung: Die absoluten Änderungen betragen bei *A* 3 Punkte, bei *B* 4 Punkte und bei *C* 15 Punkte, die relativen Änderungen bei *A* 60 %, bei *B* ca. 27 % und bei *C* 75 %. Also ist die erste Person *B* und die zweite Person *A*.

Der **Differenzenquotient** (die *mittlere Änderungsrate*) beschreibt das Verhältnis der Veränderung einer abhängigen Größe zur Veränderung einer unabhängigen Größe, symbolisch $\Delta y : \Delta x = [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] : \Delta x$ oder $[f(b) - f(a)] : (b - a)$ oder $\Delta y : \Delta t = [y(t_2) - y(t_1)] : (t_2 - t_1)$. Geometrisch ist der Differenzenquotient $\Delta y : \Delta x$ die Steigung k jener **Sekante** des zugehörigen Funktionsgraphen, der durch die Punkte $P(x_0/f(x_0))$ und $Q(x_0 + \Delta x/f(x_0 + \Delta x))$ hindurchgeht.

Der **Differentialquotient** gibt die *momentane Änderungsrate* an der Stelle x_0 an und entspricht der Steigung k der **Tangente** an die Funktion f im Punkt $P(x_0/y_0)$. Er ist der Grenzwert (limes) des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \rightarrow 0$. Für den Differentialquotienten an der Stelle x_0 ist das Symbol

$f'(x_0)$, gesprochen *f Strich* an der Stellen x_0 , aber auch (nach LEIBNIZ) $\frac{d(f(x))}{dx} = \frac{dy}{dx}$ in Gebrauch.

Von der mittleren zur momentanen Änderungsrate

<p>1. Schritt: Mittlere Änderungsrate</p>	<p><i>Beispiel:</i> $f(x) = 5x^2$</p>
<p>Die mittlere Änderungsrate entspricht der Steigung der Sekante durch die zwei entsprechenden Punkte.</p>  <p>Die Berechnung der Steigung erfolgt mit dem Differenzenquotienten. Dies entspricht der bekannten Berechnung mittels Steigungsdreieck</p> $m_{[x_0; x_0+h]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	<p>Berechnung der mittleren Änderungsrate im Intervall [2;3]:</p> $m_{[2;3]} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$ $= \frac{5 \cdot 3^2 - 5 \cdot 2^2}{3 - 2}$ $= \frac{45 - 20}{1} = 25$
<p>2. Schritt: Annäherung an die momentane Änderungsrate</p>	<p><i>Beispiel:</i> $f(x) = 5x^2$, Stelle $x_0 = 2$</p>
<p>Einen Näherungswert für die momentane Änderungsrate erhält man, wenn man immer kleinere Intervalle bei der Berechnung des Differenzenquotienten wählt.</p> 	<p>Näherung für die momentane Änderungsrate an der Stelle $x_0=2$ durch Wahl eines kleinen Intervalls [2;2,1]:</p> $m_{[2;2,1]} = \frac{f(2,1) - f(2)}{2,1 - 2}$ $= \frac{5 \cdot 2,1^2 - 5 \cdot 2^2}{2,1 - 2} = 20,5$
<p>3. Schritt: Ableitung an einer Stelle x_0 berechnen</p>	<p><i>Beispiel:</i> $f(x) = 5x^2$, Stelle $x_0 = 2$</p>
<p>Die momentane Änderungsrate / Ableitung entspricht der Steigung der Tangente im entsprechenden Punkt.</p>  <p>Die Berechnung erfolgt als Grenzwert der Sekantensteigung.</p> <p>Ableitung an der Stelle x_0: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$</p> <p>Existiert dieser Grenzwert, so heißt f an der Stelle x_0 differenzierbar.</p>	$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 \cdot (2 + h)^2 - 5 \cdot 2^2}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 \cdot (4 + 4h + h^2) - 5 \cdot 2^2}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20 + 20h + 5h^2 - 20}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(20 + 5h)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} 20 + 5h = 20$

Mat. 17/HT/Aufg. 14/1: Finanzschulden

Die Finanzschulden Österreichs haben im Zeitraum 2000 bis 2010 zugenommen. Im Jahr 2000 betragen die Finanzschulden Österreichs F_0 , zehn Jahre später betragen sie F_{10} (jeweils in Milliarden Euro). Aufgabenstellung: Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{F_{10}-F_0}{10}$ im Hinblick auf die Entwicklung der Finanzschulden Österreichs!

Mat. 17/HT/Aufg. 15/1: Differenzgleichung

Die nachstehende Tabelle enthält Werte einer Größe zum Zeitpunkt n ($n \in \mathbb{N}$):

n	0	1	2	3
x_n	10	21	43	87

Die zeitliche Entwicklung kann durch die folgende *Differenzgleichung* beschrieben werden: $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$. Aufgabenstellung: Geben Sie die Werte der (reellen) Parameter a und b so an, dass damit das in der Tabelle angegebene zeitliche Verhalten beschrieben wird!

Mat. 18/HT/Aufg. 13/1: Wertschöpfung (Prozentrechnung)

Im Jahr 2007 betrug die durchschnittliche Wertschöpfung pro Beschäftigtem in Österreichs Groß- und Mittelbetrieben 92.258 Euro und die durchschnittlichen Personalkosten 55.125 Euro, das ergibt einen Überschuss von 37.133 Euro. Aufgabenstellung: Berechnen Sie für das Jahr 2007 den Anteil des Überschusses (in Prozent), gemessen an der Pro-Kopf-Wertschöpfung! *Zusatzfrage dgm: Warum lässt sich daraus keine Aussage über den Unternehmensgewinn treffen?*

Mat. 18/HT/Aufg. 14/1: Abkühlungsprozess (Differentialquotient)

Eine Flüssigkeit wird abgekühlt. Die Funktion T beschreibt modellhaft den Temperaturverlauf. Dabei gibt $T(t)$ die Temperatur der Flüssigkeit zum Zeitpunkt $t \geq 0$ an ($T(t)$ in °C, t in Minuten). Der Abkühlungsprozess startet zum Zeitpunkt $t = 0$. Aufgabenstellung: Interpretieren Sie die Gleichung $T'(20) = -0,97$ im gegebenen Kontext unter Angabe der korrekten Einheiten!

Mat. 18/HT/Aufg. 15/1: Kredittilgung (Differenzgleichung)

Jemand hat bei einer Bank einen Wohnbalkredit zur Finanzierung einer Eigentumswohnung aufgenommen. Am Ende eines jeden Monats erhöht sich der Schuldenstand aufgrund der Kreditzinsen um 0,4 % und anschließend wird die monatliche Rate von € 450 zurückgezahlt. Der Schuldenstand am Ende von t Monaten wird durch $S(t)$ beschrieben. Aufgabenstellung: Geben Sie eine Differenzgleichung an, mit deren Hilfe man bei Kenntnis des Schuldenstands am Ende eines Monats den Schuldenstand am Ende des darauffolgenden Monats berechnen kann!

Mat. 16/HT/Aufg. 13/1: Mittlere Änderungsrate interpretieren

Gegeben ist eine Polynomfunktion f dritten Grades. Die mittlere Änderungsrate hat im Intervall $[x_1; x_2]$ den Wert 5. Aufgabenstellung: Welche der nachstehenden Aussagen können für die Funktion f sicher getroffen werden? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es mindestens eine Stelle x mit $f(x) = 5$	<input type="checkbox"/>
$f(x_2) > f(x_1)$	<input type="checkbox"/>
Die Funktion f ist im Intervall $[x_1; x_2]$ monoton steigend	<input type="checkbox"/>
$f'(x) = 5$ für alle $x \in [x_1; x_2]$	<input type="checkbox"/>
$f(x_2) - f(x_1) = 5 \cdot (x_2 - x_1)$	<input type="checkbox"/>

Mat.16/HT/Aufg. 14/1: Kapitalsparbuch

Frau Fröhlich hat ein Kapitalsparbuch, auf das sie jährlich am ersten Banköffnungstag des Jahres den gleichen Geldbetrag in Euro einzahlt. An diesem Tag schreibt diese Bank auch die Zinserträge

des Vorjahres den Kapitalsparbüchern gut. Danach wird der neue Gesamtkontostand ausgedruckt. Zwischen dem Kontostand K_{i-1} des Vorjahres und dem Kontostand K_i des aktuellen Jahres besteht der Zusammenhang $K_i = 1.03 \cdot K_{i-1} + 5000$. Aufgabenstellung: Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Frau Fröhlich zahlt jährlich 5000 Euro auf ihr Sparbuch ein	<input type="checkbox"/>
Das Kapital auf dem Sparbuch wächst jährlich um 5000 Euro	<input type="checkbox"/>
Der <i>relative jährliche Zuwachs</i> des am Ausdruck ausgewiesenen Kapitals ist größer als 3%	<input type="checkbox"/>
Die Differenz des Kapitals zweier aufeinanderfolgenden Jahre ist immer derselbe	<input type="checkbox"/>
Das Kapital auf dem Sparbuch wächst linear an	<input type="checkbox"/>

Mat. 18/1. NT/Aufg. 13: Wasserstand eines Flusses

Die Funktion $W: [0; 24] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ (= alle nichtnegativen reellen Zahlen) ordnet jedem Zeitpunkt t den Wasserstand $W(t)$ eines Flusses an einer bestimmten Messstelle zu. Dabei wird t in Stunden und $W(t)$ in Metern angegeben. Aufgabenstellung: Interpretiere den nachstehenden Ausdruck im Hinblick auf den Wasserstand $W(t)$ des Flusses: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W(6 + \Delta t) - W(6)}{\Delta t}$. (Samt korrekter Benennung!!!)

Mat. 18/1. NT/Aufg. 14: Mittlere Änderungsrate

Von einer Funktion f ist die folgende Wertetabelle gegeben:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	42	24	10	0	-6	-8	-6	0	10	24

Aufgabenstellung: Die mittlere Änderungsrate der Funktion f ist im Intervall $[-1; b]$ für genau ein $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gleich 0. Geben Sie b an!

Mat. 18/2. NT/Aufg. 13/1: Nächtigungen in Jugendherbergen

Der Wert N_{12} gibt die Anzahl der Nächtigungen in österr. Jugendherbergen im Jahr 2012 an, der Wert N_{13} jene im Jahr 2013. Aufgabenstellung: Geben Sie die Bedeutung der Gleichung $N_{13}/N_{12} = 1,012$ für die Veränderung der Anzahl der Nächtigungen in österr. Jugendherbergen an.

AN 2.1 und AN 3.1 bis 3.3

2. Stammfunktionen und Ableitungsfunktionen

Die Berechnung von Differentialquotienten $f'(x_0)$ für einzelne Stellen x_0 durch Grenzübergang (Seite 3) geht schon auf die Antike zurück. Es bedurfte aber des englischen Naturwissenschaftlers Isaak NEWTON und des deutschen Universalgenies Gottfried W. LEIBNIZ, die Existenz von **Ableitungsfunktionen** $f'(x)$ zu beweisen und dafür **Ableitungsregeln** zu erstellen, das heißt, zu jeder („differenzierbaren“) Funktion $f(x)$ die zugehörige *Ableitungsfunktion* $f'(x)$ *namhaft zu machen, welche jeden Differentialquotienten der Funktion $f(x)$ als Funktionswert liefert!* Der Vorgang wird **differenzieren** genannt und die Funktion $f(x)$ wird als **Stammfunktion** von $f'(x)$ bezeichnet.

Für den Fall, dass zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine Stammfunktion zu ermitteln ist, wird diese gerne als $F(x)$ symbolisiert und den entsprechenden Vorgang nennt man **integrieren**.

Ableitungsregeln:

Es gibt **allgemeine Regeln**, welche den Umgang mit einem konstanten Faktor sowie das Differenzieren von Summen, Produkten, Quotienten und „geschachtelten“ Funktionstermen betreffen, sowie **Regeln für bestimmte Funktionstypen**, z. B. Potenzfunktionen, Winkelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen. Weil das Differenzieren inzwischen schon jeder wissenschaftliche Taschenrechner besorgt beschränkt sich das Maturawissen auf folgende allgemeine Regeln:

Ein konstanter Faktor bleibt erhalten (1)
 Summanden werden einzeln differenziert (2)

Unter den Regeln für bestimmte Funktionstypen ist die **Potenzregel** die bei weitem wichtigste, weil sie das Differenzieren aller **Polynomfunktionen** und auch das Differenzieren **einfacher Bruch- und Wurzelterme** ermöglicht:

$$y = x^r \text{ mit } r \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = r \cdot x^{r-1} \quad (3)$$

Beispiele:

$$1. y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$2. y = \frac{a}{x^2} = a \cdot x^{-2} \Rightarrow y' = -2a \cdot x^{-3} = -\frac{2a}{x^3}$$

$$3. y = a \cdot \sqrt{x^3} = a \cdot x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3a}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3a}{2} \cdot \sqrt{x}$$

Die Ableitung der Ableitungsfunktion heißt **Zweite Ableitung**; daher wird die Ableitungsfunktion der Stammfunktion auch als **Erste Ableitung** bezeichnet.

Stammfunktion und Erste Ableitung:

Diese bestimmt gemäß Abschn. 1 das **Steigungsverhalten** der Funktionskurve von $f(x)$

1. Wo der Graph der **Stammfunktion monoton ansteigt**, da hat die **Ableitungsfunktion positive Werte** und umgekehrt. Beweis: In diesem Steigungsbereich schließen die Kurventangenten mit der positiven x-Achse Winkel $\varphi < 90^\circ$ ein, und $k = \tan(\varphi) > 0$.

2. Wo der Graph der **Stammfunktion monoton fällt**, da hat die **Ableitungsfunktion negative Werte** und umgekehrt. Beweis: In diesem Steigungsbereich schließen die Kurventangenten mit der positiven x-Achse Winkel $\varphi > 90^\circ$ ein, und $k = \tan(\varphi) < 0$.

3. An den **Nullstellen der Ableitungsfunktion** hat die **Kurve der Stammfunktion zur x-Achse parallele Tangenten**. Das weist auf **Scheitelpunkte (Hoch- und Tiefpunkte)** bzw. **lokale Extrema** hin, aber nur dann, wenn die **Zweite Ableitung ungleich 0** ist.

4. Wegen des Wegfalls eines konstanten Summanden $C \in \mathbb{R}$ beim Differenzieren gehören **zu jeder Ableitungsfunktion unendlich viele Stammfunktionen**. Ist $F(x)$ eine davon, so hat man mit $F(x) + C$ alle. Deren Kurven entstehen aus einer durch Parallelverschieben in Richtung y-Achse..

Stammfunktion und Zweite Ableitung:

Diese bestimmt das **Krümmungsverhalten** der Funktionskurve von $f(x)$.

1. Für $f''(x) > 0$ (**positive Krümmung**) beschreibt diese eine **Linkskurve** und durchläuft gegebenenfalls einen **Tiefpunkt T**, für $f''(x) < 0$ (**negative Krümmung**) beschreibt die Funktionskurve von $f(x)$ eine **Rechtskurve** und durchläuft gegebenenfalls einen **Hochpunkt H**.

2. Für $f''(x_0) = 0$ ist die Kurve an der Stelle x_0 nicht gekrümmt, was auf einem **Wendepunkt** (Wechsel von Linkskrümmung auf Rechtskrümmung) hinweist, aber nur für $f'''(x) \neq 0$.

Beispiele:

$$1. y = ax^2 \text{ mit } a \neq 0 \Rightarrow y' = 2ax, y'' = 2a \Rightarrow T(0/0) \text{ für } a > 0, H(0/0) \text{ für } a < 0$$

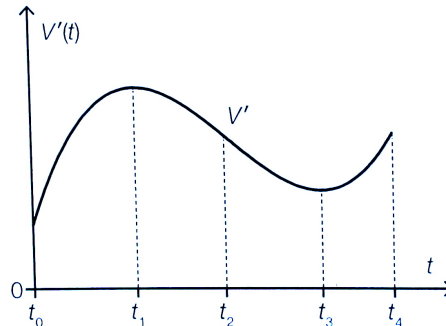
$$2. y = ax^3 \text{ mit } a \neq 0 \Rightarrow y' = 3ax^2, y'' = 6ax, y''' = 6a \neq 0 \Rightarrow W(0/0)$$

$$3. y = ax^4 \text{ mit } a \neq 0 \Rightarrow y' = 4ax^3, y'' = 12ax^2, y''' = 24ax: f''(0) \text{ ist zwar Null, aber die Krümmung ist durchwegs positiv und } f'''(0) = 0. \text{ Beim Punkt } O(0/0) \text{ handelt es sich um einen speziellen Tiefpunkt, der } \textit{Flachpunkt} \text{ genannt wird.}$$

Mat. 18/2. NT/Aufg. 14/1:

Das in einem Gefäß enthaltene Flüssigkeitsvolumen V ändert sich im Laufe der Zeit t im Zeitintervall $[t_0; t_4]$.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion V' , die die momentane Änderungsrate des im Gefäß enthaltenen Flüssigkeitsvolumens in diesem Zeitintervall angibt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß nimmt im Zeitintervall $[t_1; t_3]$ ab.	<input type="checkbox"/>
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt t_2 kleiner als zum Zeitpunkt t_3 .	<input type="checkbox"/>
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß weist zum Zeitpunkt t_3 die niedrigste momentane Änderungsrate auf.	<input type="checkbox"/>
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt t_4 am größten.	<input type="checkbox"/>
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zu den Zeitpunkten t_2 und t_4 gleich groß.	<input type="checkbox"/>

Mat. 17/HT/Aufg. 16: Tiefe eines Gerinnes

Zur Vorbeugung vor Hochwässern wurde in einer Stadt ein Gerinne (Wasserlauf) angelegt. Die Funktion f beschreibt die Wassertiefe dieses Gerinnes bei einer Hochwasserentwicklung in Abhängigkeit von der Zeit t an einer bestimmten Messstelle für das Zeitintervall $[0; 2]$. Die Gleichung der Funktion f lautet $f(t) = t^3 + 6 \cdot t^2 + 12 \cdot t + 8$ mit $t \in [0; 2]$. Dabei wird $f(t)$ in dm und t in Tagen gemessen. Aufgabenstellung: Geben Sie eine Gleichung der Funktion g an, die die momentane Änderungsrate der Wassertiefe des Gerinnes (in dm pro Tag) in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt!

Mat. 16/HT/Aufg. 16/1: Nachweis eines lokalen Minimums

Gegeben ist eine Polynomfunktion p mit $p(x) = x^3 - 3x + 2$. Die erste Ableitung p' mit $p'(x) = 3x^2 - 3$ hat an der Stelle $x = 1$ den Wert 0. Aufgabenstellung: Zeigen Sie rechnerisch, dass p an dieser Stelle ein lokales Minimum, d. h. der Graph an dieser Stelle dort einen Tiefpunkt, hat.

Mat. 18/HT/Aufg. 16/1: Beziehungen zwischen Funktion, Ableitungs- und Stammfunktion

Es sei f eine Polynomfunktion dritten Grades, f' ihre Ableitungsfunktion und F eine der Stammfunktionen von f . Aufgabenstellung: Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz so, dass eine korrekte Aussage entsteht! Welches der drei Symbole f , f' oder F ist in die erste Lücke, welches ist

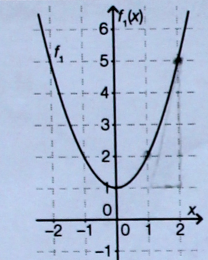
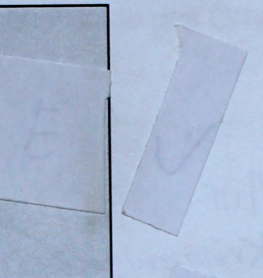
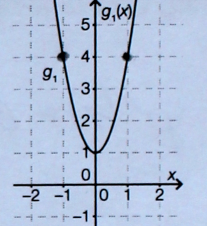
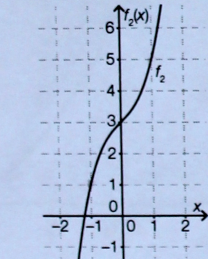
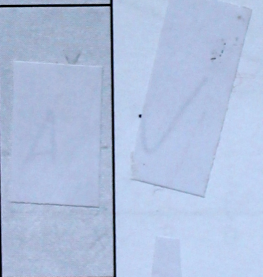
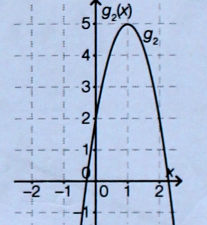
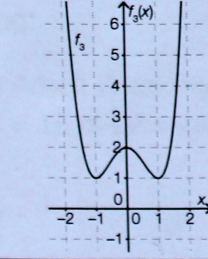
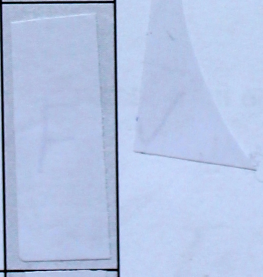
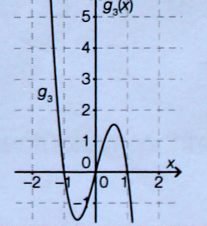
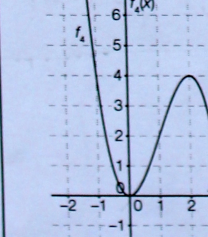
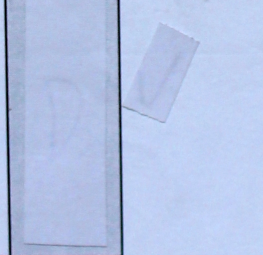
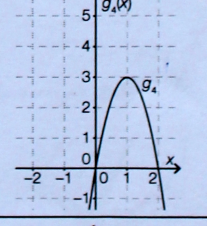

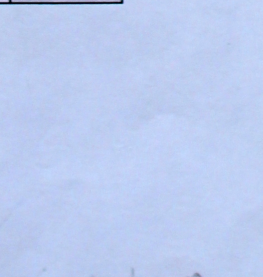
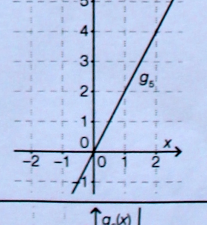
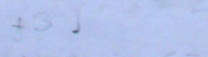

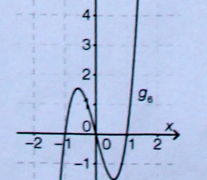
in die zweite Lücke einzusetzen? Die zweite Ableitungsfunktion der Funktion ... ist die Funktion ...

Mat. 16/HT/Aufg. 15/1:

Links sind die Graphen von vier Polynomfunktionen (f_1, f_2, f_3, f_4) abgebildet, rechts die Graphen sechs weiterer Funktionen ($g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$).

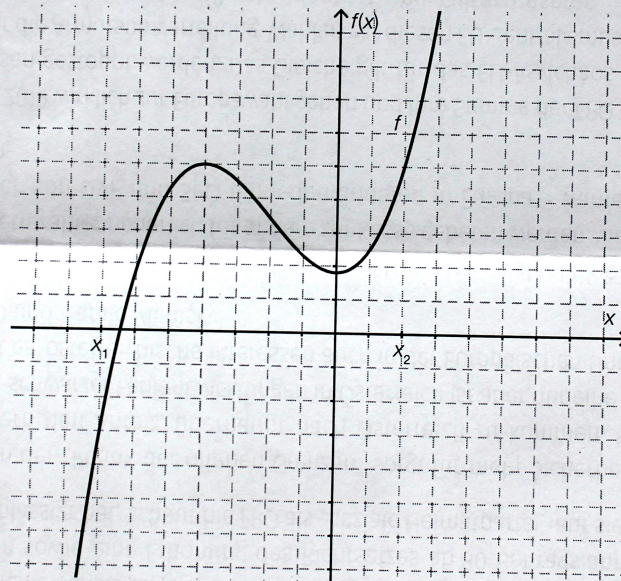
Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Polynomfunktionen f_1 bis f_4 ihre jeweilige Ableitungsfunktion aus den Funktionen g_1 bis g_6 (aus A bis F) zu!

		A	
		B	
		C	
		D	
		E	
		F	

Mat. 17/HT/Aufg. 17:

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f .

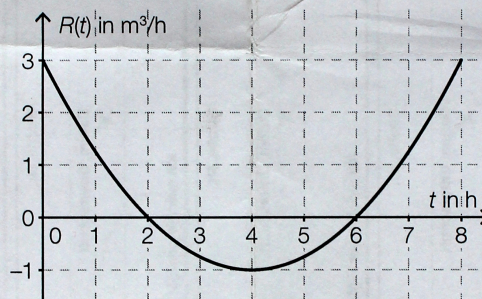


Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der gegebenen Grafik den Graphen der Ableitungsfunktion f' im Intervall $[x_1; x_2]$ und markieren Sie gegebenenfalls die Nullstellen!

Mat. 17/HT/Aufg. 18:

In der nachstehenden Abbildung ist die momentane Änderungsrate R der Wassermenge in einem Behälter (in m^3/h) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt.



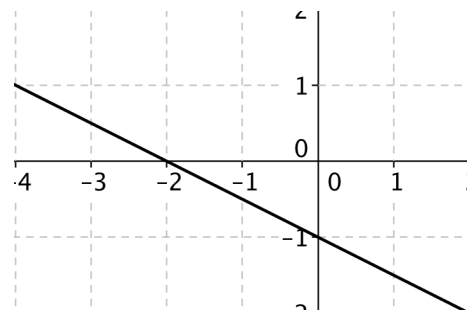
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen über die Wassermenge im Behälter an!

Zum Zeitpunkt $t = 6$ befindet sich weniger Wasser im Behälter als zum Zeitpunkt $t = 2$.	<input type="checkbox"/>
Im Zeitintervall $(6; 8)$ nimmt die Wassermenge im Behälter zu.	<input type="checkbox"/>
Zum Zeitpunkt $t = 2$ befindet sich kein Wasser im Behälter.	<input type="checkbox"/>
Im Zeitintervall $(0; 2)$ nimmt die Wassermenge im Behälter ab.	<input type="checkbox"/>
Zum Zeitpunkt $t = 4$ befindet sich am wenigsten Wasser im Behälter.	<input type="checkbox"/>

Mat. 18/1. NT/Aufg. 15/1:

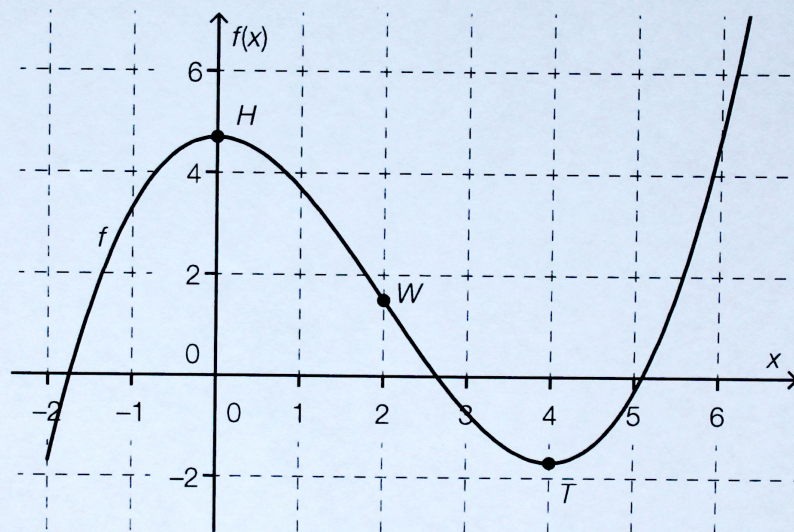
In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Funktion g dargestellt. Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden für die Funktion g zutreffenden Aussagen an:



Jede Stammf. G von g ist Polynomfunkt. 2. Grades	<input type="checkbox"/>
Jede Funkt. G hat a. d. Stelle $x = -2$ ein lok. Minimum	<input type="checkbox"/>
Jede Funkt. G ist im Interv. $(0; 2)$ streng mon. fallend	<input type="checkbox"/>
$G(x) = -0,5$ ist eine Stammfunktion von g	<input type="checkbox"/>
Jede Funkt. G hat mindestens eine Nullstelle	<input type="checkbox"/>

Mat. 18/HT/Aufg. 16/1:

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades.



Die eingezeichneten Punkte sind der Hochpunkt $H = (0 | f(0))$, der Wendepunkt $W = (2 | f(2))$ und der Tiefpunkt $T = (4 | f(4))$ des Graphen.

Aufgabenstellung:

Nachstehend sind fünf Aussagen über die zweite Ableitung von f gegeben. Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Für alle x aus dem Intervall $[-1; 1]$ gilt: $f''(x) < 0$.	<input type="checkbox"/>
Für alle x aus dem Intervall $[1; 3]$ gilt: $f''(x) < 0$.	<input type="checkbox"/>
Für alle x aus dem Intervall $[3; 5]$ gilt: $f''(x) < 0$.	<input type="checkbox"/>
$f''(0) = f''(4)$	<input type="checkbox"/>
$f''(2) = 0$	<input type="checkbox"/>

3. Summation und Integral

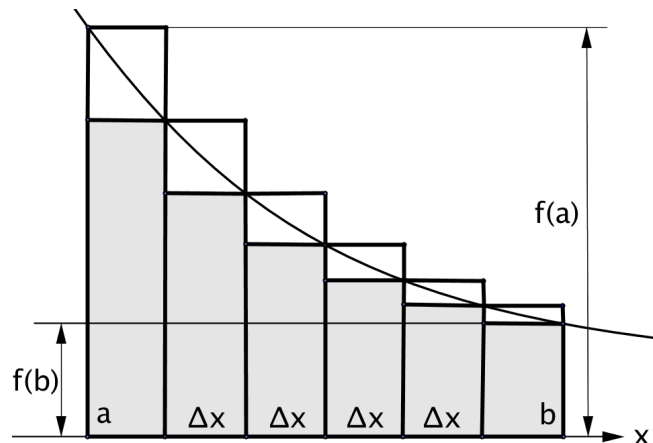
Nach Meyers Lexikon steht *Integration* ganz allgemein für die Herstellung eines Ganzen, abgeleitet von lat. integrare „wiederherstellen“ oder „in ein größeres Ganzes einbeziehen“. In der Mathematik ist damit die *Berechnung von Längen, Flächen- und Rauminhalten durch das **Summieren** von Teillängen, Teilflächen und Teilvolumina* gemeint.

Bei den Flächenberechnungen wird der Inhalt von n rechteckigen und gleich breiten Streifen, welche die Fläche annähern, summiert, bei Rotationskörpern die Summe der Volumina von n drehzylinderförmigen Scheiben mit gleicher Achse und gleicher Höhe, welche eine gestufte Annäherung an den Drehkörper bilden.

Diese Vorgehensweise wurde bereits lange vor NEWTON und LEIBNIZ gepflogen, welchen allerdings das Verdienst zukommt, mit der *Integralrechnung* ein einheitliches Kalkül für solche Berechnungen entwickelt zu haben. Gedanklich fußt diese Entwicklung aber auf dem (daher im wörtlichen Sinn) ursprünglichen Verfahren, worauf in der Praxis aber nur mehr die Symbole, vor allem das Integralzeichen \int – als langgezogenes S für „Summe“ – hinweisen.

Untersummen und Obersummen:

Sind ein von den Zahlen a und b auf der x -Achse begrenztes Intervall und darüber eine Funktionskurve mit der Gleichung $y = f(x)$ gegeben, dann kann die dazwischen liegende Fläche durch die Summe von n rechteckigen Streifen gleicher Breite Δx angenähert werden. Diese Annäherung kann von unten, aber auch von oben erfolgen. Demzufolge sprechen wir von einer Untersumme U_n oder von einer Obersumme O_n . Die Formel $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ist (unter der Voraussetzung $b > a$) leicht zu verifizieren.



In der obigen Figur hat das kleinste Rechteck der Untersumme den Flächeninhalt $f(b) \cdot \Delta x$ und das größte Rechteck der Obersumme hat den Flächeninhalt $f(a) \cdot \Delta x$. Lassen wir die Kurve um die x -Achse rotieren, dann entsteht ein trichterförmiger Drehkörper, der von Drehzylindern angenähert wird. Nach deren Volumensformel $V = r^2 \pi h$ hat der kleinste Drehzylinder der Untersumme das Volumen $f^2(b) \cdot \pi \cdot \Delta x$ und der größte Drehzylinder der Obersumme hat das Volumen $f^2(a) \cdot \pi \cdot \Delta x$.

In beiden Fällen entsteht für eine zunehmende Verfeinerung der Einteilung, also für wachsendes n , eine Zahlenfolge $\langle U_n \rangle$ bzw. $\langle O_n \rangle$, deren Elemente sich der zu berechnenden Fläche bzw. dem gefragten Volumen annähern. Die Folge der Untersummen wächst mit zunehmendem n monoton und die Folge der Obersummen fällt mit zunehmendem n monoton demselben Grenzwert entgegen. Sofern sich Untersummen und Obersummen durch einen rational gebrochenen Term $T(n)$ beschreiben lassen und der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durchgeführt werden kann gelangt man auf diesem Weg zu einem exakten Ergebnis. Auf diesem Weg hat u. a. bereits ARCHIMEDES Flächeninhalte und Volumina berechnet. Erst NEWTON und LEIBNIZ haben (unabhängig voneinander) entdeckt, dass ein exaktes Ergebnis aber auch mit Hilfe einer Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ berechnet werden kann.

Flächeninhalte als Grenzwerte

Der Figur auf Seite 11 ist unmittelbar folgender Sachverhalt zu entnehmen, sofern wir $a = 0$ annehmen, was bei den weiteren Beispielen der Fall sein wird: Verläuft die Funktionskurve von links oben nach rechts unten, so sind an der Untersumme U_n der Reihe nach die Funktionswerte an den Stellen $\frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}$ usw. bis $\frac{n \cdot b}{n} = b$ beteiligt, an der Obersumme O_n hingegen die Funktionswerte an den Stellen $0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}$ usw. bis $\frac{(n-1) \cdot b}{n}$. (Verläuft die Funktionskurve von links unten nach rechts oben, dann ist es umgekehrt.) Wird eine solche Unterscheidung nicht getroffen, dann kann der zu bildende Term $T(n)$ eine Untersumme oder eine Obersumme beschreiben. Für das Ergebnis ist das insofern bedeutungslos, als der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in beiden Fällen zu demselben Ergebnis führt.

Damit sich der Term $T(n)$ bilden lässt ist ausschlaggebend, dass eine Summenformel angewendet werden kann, wie solche für Reihen existieren, z. B. gilt für die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n die Formel $\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$, welche der deutsche Mathematiker Carl F. GAUSS schon mit acht Jahren gefunden hat.

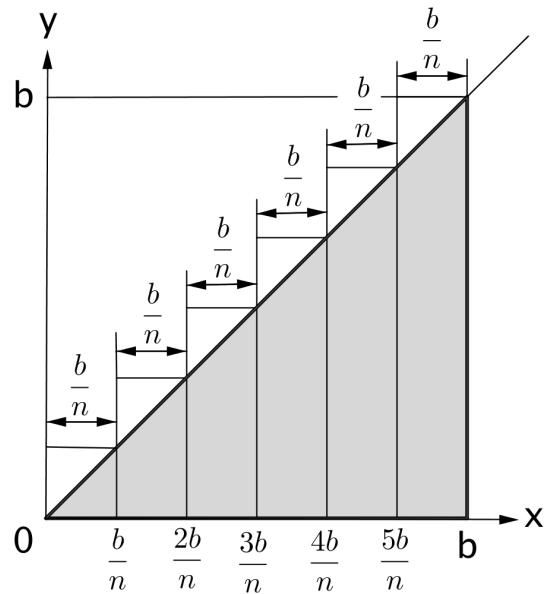
Beispiel: Es ist der Inhalt A der zwischen der x -Achse und der Geraden mit der Gleichung $y = x$ liegenden Fläche zwischen den Grenzen $x = a = 0$ und $x = b$ als Grenzwert einer Summenfolge zu berechnen.

$$T(n) = \sum_{i=1}^n \frac{i \cdot b}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n^2 + n}{2} = \frac{1}{2} \cdot (b^2 + \frac{b^2}{n})$$

Für $n \rightarrow \infty$ verschwindet der 2. Summand in der Klammer, das Ergebnis lautet also $A = \frac{b^2}{2}$. Das ist die Hälfte des Flächeninhalts eines Quadrats mit der Seitenlänge b , wie es zu erwarten war.

Dieses triviale Beispiel bestätigt den bereits angedeuteten Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt unter der Funktionskurve einer Funktion $f(x)$ und einer zugehörigen Stammfunktion $F(x)$. Für $f: y = x$ gilt $F: y = \frac{x^2}{2}$. Deren Wert an der oberen Grenze b minus deren Wert an der unteren Grenze a ergibt den Flächeninhalt:

$$A = F(b) - F(a) = \frac{b^2}{2} - 0 = \frac{b^2}{2}.$$



Das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Das Symbol deutet durch das langgezogene S eine Summation (von a bis b) an, deren Summanden Rechtecke mit der Höhe $f(x)$ und der Breite dx (als gegen 0 geschrumpfte Δx) sind. Hinsichtlich des Flächeninhalts ist zu beachten, dass nur für positive y -Werte positive Summanden entstehen, die eine positive Summe bilden. Für negative y -Werte ergeben sich negative Summanden und damit auch eine negative Summe. Für Funktionskurven, die zwischen a und b die x -Achse schneiden, ist das zu beachten, also gegebenenfalls getrennte Rechnungen – für den Kurventeil links und rechts von der Schnittstelle – durchzuführen.

Integrationsregeln:

Zur Herleitung von Stammfunktionen zu gegebenem $f(x)$ gibt es (wie beim Differenzieren) **allgemeine Regeln** sowie **Regeln für bestimmte Funktionstypen**. Man kann sie i. A. nach dem Prinzip herleiten, dass die Erste Ableitung $f(x)$ ergeben muss. Daraus folgen unmittelbar die Regeln

Ein konstanter Faktor bleibt erhalten (1)

Summanden werden einzeln integriert (2)

Unter den Regeln für bestimmte Funktionstypen ist die **Potenzregel** die bei weitem wichtigste, weil sie das Integrieren aller **Polynomfunktionen** und auch das Integrieren **einfacher Bruch- und Wurzelterme** ermöglicht:

$$y = x^r \text{ mit } r \in \mathbb{R} \text{ ohne } \{-1\} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + C \quad (3)$$

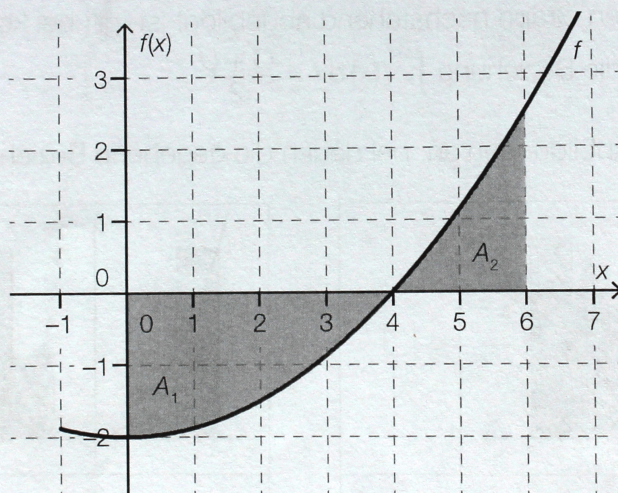
- Beispiele:
1. $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow F(x) = \frac{a}{3} \cdot x^3 + \frac{b}{2} \cdot x^2 + c \cdot x + d$
 2. $f(x) = \frac{a}{x^2} = ax^{-2} \Rightarrow F(x) = -a \cdot x^{-1} = -\frac{a}{x} + C$
 3. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{3} + C$

Mat. 18/2. NT/Aufg. 18/1:

Nachstehend ist der Graph einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt. Zusätzlich sind zwei Flächen gekennzeichnet.

Die Fläche A_1 wird vom Graphen der Funktion f und von der x -Achse im Intervall $[0; 4]$ begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{16}{3}$ Flächeneinheiten.

Die Fläche A_2 wird vom Graphen der Funktion f und von der x -Achse im Intervall $[4; 6]$ begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{7}{3}$ Flächeneinheiten.



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^6 f(x) dx$ an!

Mat. 18/1. NT/Aufg. 18/1:

Die Funktion a beschreibt die Beschleunigung eines sich in Bewegung befindlichen Objekts in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitintervall $[t_1; t_1 + 4]$. Die Beschleunigung $a(t)$ wird in m/s^2 , die Zeit t in s angegeben.

Es gilt:

$$\int_{t_1}^{t_1+4} a(t) dt = 2$$

Aufgabenstellung:

Eine der nachstehenden Aussagen interpretiert das angegebene bestimmte Integral korrekt. Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!

Das Objekt legt im gegebenen Zeitintervall 2 m zurück.	<input type="checkbox"/>
Die Geschwindigkeit des Objekts am Ende des gegebenen Zeitintervalls beträgt 2 m/s.	<input type="checkbox"/>
Die Beschleunigung des Objekts ist am Ende des gegebenen Zeitintervalls um 2 m/s^2 höher als am Anfang des Intervalls.	<input type="checkbox"/>
Die Geschwindigkeit des Objekts hat in diesem Zeitintervall um 2 m/s zugenommen.	<input type="checkbox"/>
Im Mittel erhöht sich die Geschwindigkeit des Objekts im gegebenen Zeitintervall pro Sekunde um 2 m/s.	<input type="checkbox"/>
Im gegebenen Zeitintervall erhöht sich die Beschleunigung des Objekts pro Sekunde um $\frac{2}{4} \text{ m/s}^2$.	<input type="checkbox"/>

Beachte: Bei einer Weg-Zeit-Funktion $s = f(t)$ beschreibt die Erste Ableitung die Geschwindigkeit $v(t) = f'(t)$ und die Zweite Ableitung die Beschleunigung $a(t) = f''(t)$.

Mat. 18/2. NT/Aufg. 15/1: Zusammenhang zwischen Funktion und Stammfunktionen

Die Funktionen g und h sind unterschiedliche Stammfunktionen einer Polynomfunktion f von Grad $n \geq 1$. Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an:

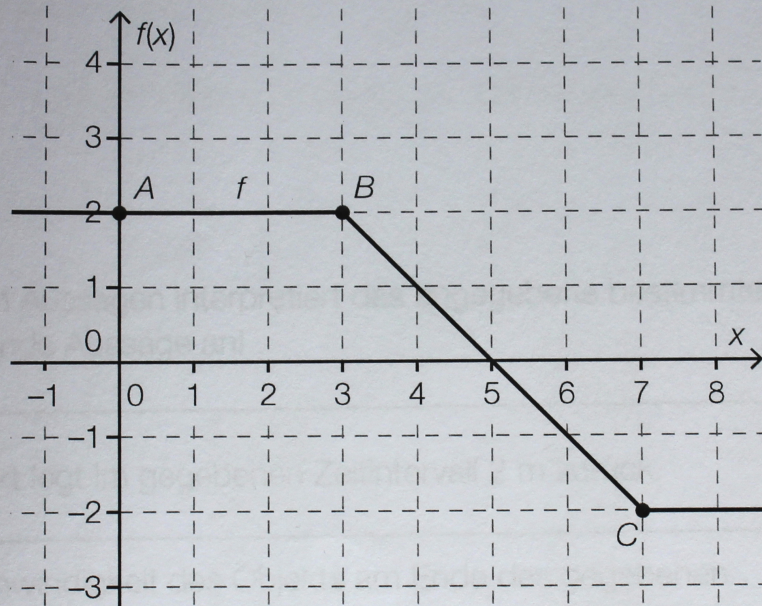
$g'(x) = h'(x)$	<input type="checkbox"/>
$g(x) + h(x) = C, C \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>
$\int_0^2 g(x) dx = f(2) - f(0)$	<input type="checkbox"/>
$\int_0^2 f(x) dx = h(2) - h(0)$	<input type="checkbox"/>
$g(x) = c \cdot h(x), c \in \mathbf{R} \text{ ohne } \{1\}$	<input type="checkbox"/>

Mat. 16/HT/Aufg. 18/1: Integral

Gegeben ist die Potenzfunktion f mit $f(x) = x^3$. Aufgabenstellung: Geben Sie eine Bedingung für die Integrationsgrenzen b und c ($b \neq c$) so an, dass $\int_b^c f(x) dx = 0$ gilt.

Mat. 18/1. NT/Aufg. 17/1:

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer abschnittsweise linearen Funktion f dargestellt. Die Koordinaten der Punkte A , B und C des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^7 f(x) dx$!

Mat. 18/HT/Aufg. 17/1:

Eine nicht konstante Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat die folgenden Eigenschaften:

$f(3) = 3$

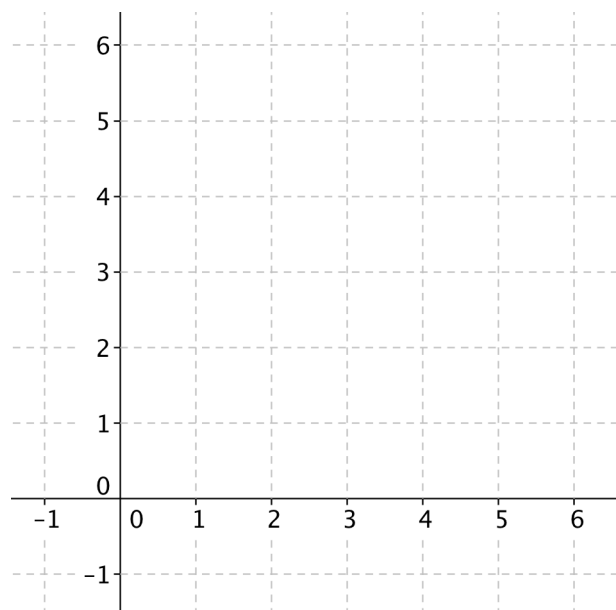
$f'(3) = 0$

$f''(3) = 0$

$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der nebenstehenden Abbildung einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f !



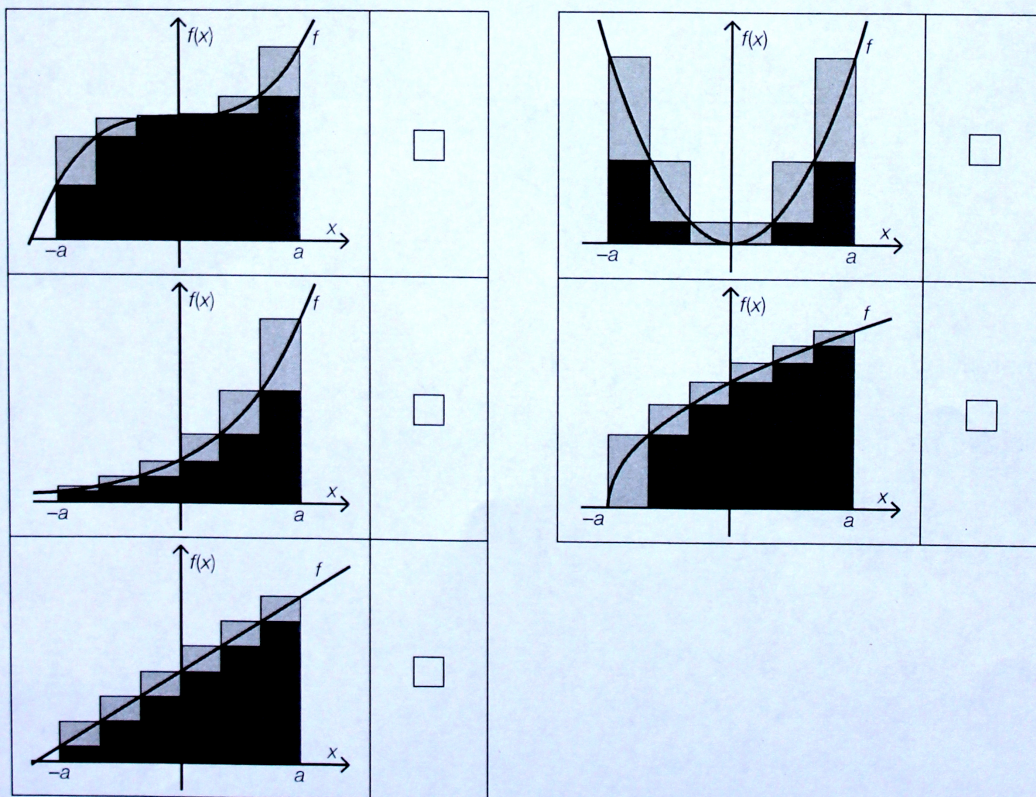
Mat. 18/2. NT/Aufg. 17/1:

In den nachstehenden Abbildungen sind jeweils der Graph einer Funktion f sowie eine Untersumme U (= Summe der Flächeninhalte der dunkel markierten, gleich breiten Rechtecke) und eine Obersumme O (= Summe der Flächeninhalte der dunkel und hell markierten, gleich breiten Rechtecke) im Intervall $[-a; a]$ dargestellt.

Aufgabenstellung:

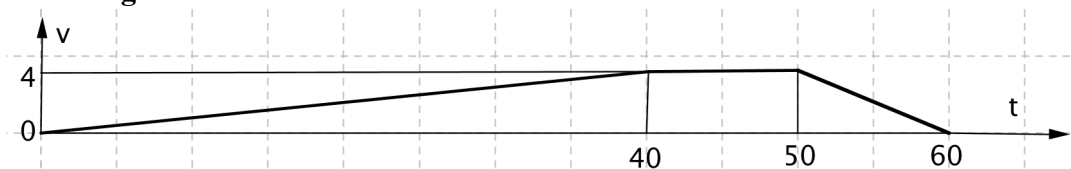
Für zwei Funktionen, deren Graph nachstehend abgebildet ist, gilt bei konstanter Rechteckbreite im Intervall $[-a; a]$ die Beziehung $\int_{-a}^a f(x) dx = \frac{O+U}{2}$.

Kreuzen Sie die beiden Abbildungen an, bei denen die gegebene Beziehung erfüllt ist!



Intuitiv müssten Abb. 1 und Abb. 3 zutreffen. Rechnung: Für beide Abbildungen gilt $I = U + \frac{O-U}{2} = \frac{2U+O-U}{2} = \frac{O+U}{2}$.

Mat. 14/HT/Aufg. 18/1:



Obige Abbildung beschreibt näherungsweise das Wachstum einer schnellwüchsigen Pflanze. Sie zeigt die Wachstumsgeschwindigkeit v (in cm/Tag) in Abhängigkeit von der Zeit t während eines Zeitraums von 60 Tagen. Z. B. wächst zwischen dem 40. und dem 50. Tag um je 4 cm. Aufgabenstellung: Wie groß (in cm) ist die Pflanze nach 60 Tagen?

Zwei Lösungswege:

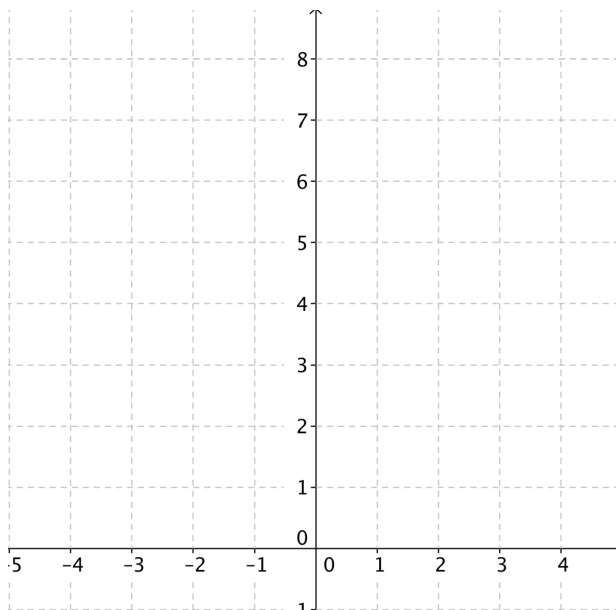
1. Die gezeichnete Funktionskurve (= drei Strecken) dokumentiert die Erste Ableitung der Weg-Zeit-Funktion, wobei der Weg in diesem Fall der von der Zeit abhängige Wachstumszuwachs ist. Diese Funktion $W(t)$ ist also die zugehörige Stammfunktion, ihre y -Werte sind durch den Flächeninhalt unter den drei Strecken gekennzeichnet. Also $W(60) = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 140 \text{ cm}$.

2. Berechnung durch Integration: Im ersten Teilstück ist $W'(t) = 0,1 \cdot t$, im zweiten Teilstück ist $W'(t) = 4$ und im dritten Teilstück ist $W'(t) = -0,4 \cdot t + 24$. Das ergibt

$$W(60) = \int_0^{40} 0,1 \cdot t \cdot dt + \int_{40}^{50} 4 \cdot dt + \int_{50}^{60} (-0,4 \cdot t + 24) \cdot dt = 0,05 \cdot t^2 \Big|_0^{40} + 4t \Big|_{40}^{50} + (-0,2t^2 + 24t) \Big|_{50}^{60} = 80 + 40 + 20 = 140 \text{ cm}$$

Mat. 14/HT/Aufg. 17/1:

Gegeben sind die beiden reellen Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 8$. Aufgabenstellung: Im nachstehenden Koordinatensystem sind die Graphen der beiden Funktionen f und g dargestellt. Schraffieren Sie jene Fläche, deren Inhalt A als $\int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$ berechnet werden kann!



Hinweis: In der Originalaufgabe sind die beiden Graphen bereits vorgezeichnet. Hier sind sie hingegen zuerst im rechts angegebenen Koordinatensystem einzuzeichnen.

Mat. 14/2. NT/Aufg. 17/1:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3x^2 + 2$. Aufgabenstellung: Geben Sie die Funktionsgleichungen von zwei verschiedenen Funktionen F_1 und F_2 an, deren Ableitungsfunktion die Funktion f ist!

Mat. 15/1. NT/Aufg. 18/1:

In einem Wasserrohr wird durch einen Sensor die Durchflussrate (= Durchflussmenge pro Zeiteinheit) gemessen. Die Funktion D ordnet jedem Zeitpunkt t die Durchflussrate $D(t)$ zu. Dabei wird t in Minuten und $D(t)$ in Litern pro Minute angegeben. Aufgabenstellung: Geben Sie die Bedeutung der Zahl $\int_{60}^{120} D(t) dt$ im vorliegenden Kontext an.

Mat. 15/1. NT/Aufg. 17/1:

Zwei der nachstehend angeführten Gleichungen sind für alle Polynomfunktionen f und bei beliebiger Wahl der Integrationsgrenzen a und b (mit $a < b$) richtig. Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

$\int_a^b (f(x) + x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b x dx$	<input type="checkbox"/>
$\int_a^b (f(x) + 2) dx = \int_a^b f(x) dx + 2$	<input type="checkbox"/>
$\int_a^b (1 - f(x)) dx = x - \int_a^b f(x) dx$	<input type="checkbox"/>

$\int_a^b f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx$	
$\int_a^b (3 \cdot f(x))dx = 3 \cdot \int_a^b f(x)dx$	

Zusatz (dgm): Die falschen Gleichungen richtig stellen!

Hinsichtlich Gl. 4: Substitution $u = 2x$ i. d. Grenzen $u_1 = 2a$, $u_2 = 2b \Rightarrow \boxed{\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}}$, somit

$$\int_a^b f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_{2a}^{2b} f(u)du$$

Beispiel: $f(2x) = 2x \Rightarrow \int_a^b 2x dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = b^2 - a^2$, $\frac{1}{2} \int_{2a}^{2b} u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2} \Big|_{2a}^{2b} = \frac{1}{4} \cdot (4b^2 - 4a^2) = b^2 - a^2$