7.33 Das Bézoutsche Theorem

Dass im projektiven Raum R_2 zwei Gerade, wenn sie nicht identisch sind, genau einen Schnittpunkt haben, eine Gerade und ein Kegelschnitt immer deren zwei sowie zwei Kegelschnitte genau vier, das hat in der Algebra seine Entsprechung im *Bézoutschen Theorem*. Während bei Systemen von inhomogenen Gleichungen verschiedener Grade n_1, n_2, …keine Regel über die Anzahl N der Lösungen existiert, hat der Franzose Étienne BÉZOUT (1730 – 1783) für *homogene Gleichungssysteme* den folgenden allgemeingültigen Satz entdeckt:

> m – 1 Gleichungen in m Variablen haben genau $N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{m-1}$ (nicht kollineare) Lösungen, sofern die (geometrisch sinnlose) triviale Lösung nicht mitgezählt wird, oder sie haben unendlich viele.

Im R_2 haben wir es unter Verwendung homogener Punktkoordinaten immer mit zwei homogenen Gleichungen und drei Variablen zu tun: Daher haben zwei lineare Gleichungen immer $1 \cdot 1 = 1$ Lösungstripel $(x_1{:}x_2{:}x_0)$, eine lineare und eine quadratische Gleichung deren $1 \cdot 2 = 2$ und zwei quadratische Gleichungen $2 \cdot 2 = 4$. (Zwei dieselbe Gerade oder Kurve beschreibende Gleichungen sind der Ausnahmefall.)