Archimedische Körper

Von Dieter Grillmayer

Dieser Text kann als Fortsetzung/Ergänzung meines Aufsatzes „Planare Graphen und der Eulersche Polyedersatz“ gelten und ist im Wesentlichen eine entsprechende Adaption des gleichnamigen Abschnittes aus meinem bei „Books on Demand“ im Jahr 2010 veröffentlichten Buch „Im Reich der Geometrie, Teil II: Räumliche Geometrie“.

Nach meinem Hochschulwissen sind *Archimedische Körper* konvexe Polyeder mit durchwegs gleich langen Kanten, die eine Umkugel, aber keine Inkugel besitzen. Daraus folgt, dass die Begrenzungsfächen solcher Körper regelm. Vielecke sind, denn es handelt sich um Vielecke mit durchwegs gleich langen Seiten, die einen Umkreis (als Schnittkreis der zugehörigen Trägerebene mit der Umkugel) haben müssen.

Im Unterschied zu den *regelm. Polyedern*, welche wegen ihrer „Vollkommenheit“ im Ideenkosmos des großen griechischen Philosophen PLATON (um 427 bis 347 v. Chr.) einen besonderen Platz einnehmen und daher auch *Platonische Körper* genannt werden, treten bei den auch als *semireguläre Polyeder* bezeichneten Archimedischen Körpern aber mehrere Arten von Begrenzungsflächen auf. Nicht eruieren konnte ich, warum diese Körper nach ARCHIMEDES (um 287 bis 212 v. Chr.), dem wohl produktivsten Mathematiker und Naturwissenschafter des Altertums, benannt sind.

Die Sprachregelung zu dem Thema ist uneinheitlich und teilweise hinterfragbar, wie darzulegen sein wird. Zum Beispiel gehörten nach obiger Definition auch regelm. Prismen, bei denen die Höhe h mit der Länge a der Basiskanten übereinstimmt, zu den Archimedischen Körpern, doch werden diese zumeist ausgenommen. So etwa in dem unter dem gegenständlichen Stichwort von der Universität Bremen ins Netz gestellten Aufsatz, wo überhaupt nur 13 verschiedene Archimedische Körper als solche anerkannt, abgebildet und beschrieben werden.

Erzeugung Archimedischer Körper durch „Eckenabschneiden“

Sieben davon lassen sich durch *Eckenabschneiden* aus Platonischen Körpern gewinnen, und zwar zwei durch kantenhalbierende Ebenen und fünf durch ebene Schnitte, bei denen Teilstücke der ursprünglichen Kanten erhalten bleiben. Der in Fig. 1 durch Auf- und Frontalriss dargestellte Archimedische Körper möge als erstes Beispiel für diese Schnittführung dienen. Er entsteht aus einem regelm. Tetraeder durch vier kantendrittelnde Schnittebenen, welche das Tetraeder „abstumpfen“, was auch bei den vier anderen Platonischen Körpern machbar ist.

Hinweis: Die Figuren 1 bis 6a sind mit dem seinerzeit an der Wiener Technik entwickelten Computer-Zeichenprogramm CAD2D hergestellt worden

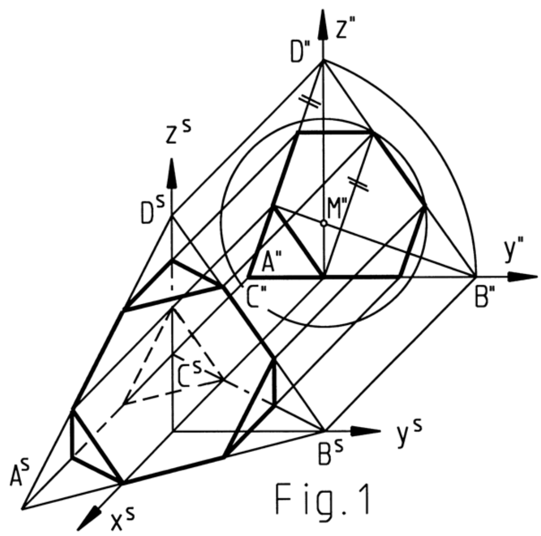


Fig. 1

Für alle sieben durch das Eckenabschneiden aus Platonischen Körpern abgeleitete Archimedische Körper gilt für die Anzahl f ihrer Begrenzungsflächen, dass es sich um die Summe aus der Flächenanzahl f* und der Eckenanzahl e* des *Ausgangsobjektes* handelt: f = f* + e*. Denn für jede seiner Ecken ergibt sich eine Schnittfläche und für jede seiner Flächen eine dieser eingeschriebene Begrenzungsfläche des neuen Objektes.

Archimedische Körper, deren Ecken die Kantenmitten Platonischer Körper sind

Wenn die Schnittführung durch kantenhalbierende Ebenen erfolgt, dann liegt auf jeder Kante des Ausgangskörpers genau eine Ecke des neuen Körpers. Die Eckenanzahl e des Archimedischen Körpers ist daher gleich der Kantenanzahl k* des Platonischen Körpers, aus dem er hervorgeht: e = k*. Weil pro Schnitt in jeder der beiden die entsprechende Kante bildenden Flächen des Ausgangskörpers zwei Schnittkanten liegen, gehen durch jede Ecke des neuen Körpers vier Kanten. Allerdings liegen auf jeder dieser Kanten zwei Ecken, sodass jeder Archimedische Körper dieser Art k = (4e) : 2 = 2e, also doppelt so viele Kanten wie Ecken hat.

Aus einem regelm. Tetraeder wird auf diesem Weg allerdings kein Archimedischer Körper hergestellt, sondern ein regelm. Oktaeder, wie die Flächenanzahl f = f* + e* = 4 + 4 = 8, die Eckenanzahl e = k* = 6 sowie die Kantenanzahl k = 2k* = 12 belegt und wie auch durch eine Zeichnung leicht überprüft werden kann.

Aus einem Würfel entsteht durch kantenhalbierendes Eckenabschneiden ein Archimedischer Körper, der von acht gleichseitigen Dreiecken und sechs Quadraten begrenzt wird (Fig. 2). Ein Objekt derselben Form entsteht aber auch durch kantenhalbierendes Eckenabschneiden aus einem regelm. Oktaeder. Mengentheoretisch gesehen ist dieses Objekt der Durchschnitt aus einem Würfel (= Kubus) mit der Kantenlänge a und einem regelm. Oktaeder, dessen drei Diagonalen je zwei zueinander symmetrische Mittelpunkte der Würfelflächen enthalten und die Länge 2a besitzen.

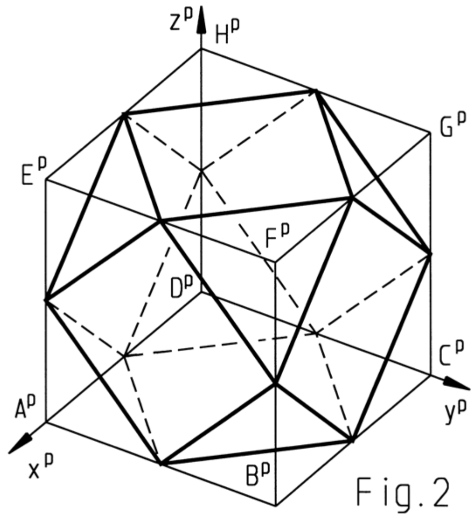


Fig. 2

Dieser Tatsache verdankt dieser Archimedische Körper auch den Namen *Kuboktaeder*, wiewohl er kein Oktaeder, also kein Achtflächner ist.

Analog dazu entsteht ein Archimedischer Körper derselben Form durch kantenhalbierendes Eckenabschneiden sowohl aus einem regelm. Dodekaeder wie auch aus einem regelm. Ikosaeder, welcher auch als Durchschnitt größen- und lagemäßig aufeinander abgestimmter Ausgangsobjekte der genannten Art interpretiert werden kann. Er wird von 20 gleichseitigen Dreiecken und zwölf regelm. Fünfecken begrenzt und als *Ikosidodekaeder* bezeichnet, wiewohl er kein Dodekaeder, also kein Zwölfflächner ist.

Die folgende Tabelle gibt für die zwei neuen Körper die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten an. Der Eulersche Polyedersatz ist durchgehend erfüllt.

Art der Begrenzungsflächen	f	e	k	f + e - k
8 gleichseitige Dreiecke und 6 Quadrate	14	12	24	2
20 gleichseitige Dreiecke u. 12 regelm. Fünfecke	32	30	60	2

Die zweite Art der Schnittführung

Jedem regelm. n-Eck, das einen Platonischen Körper begrenzt, wird ein regelm. 2n-Eck so eingeschrieben, dass auf jeder Seite des n-Ecks auch eine Seite des 2n-Ecks liegt. Damit sind die Schnitte markiert, nach denen das Eckenabschneiden erfolgt (Fig. 1, 3, 4, 5). Bei den von gleichseitigen Dreiecken begrenzten Platonischen Körpern (Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder) ist diese zweite Art der Schnittführung gleichbedeutend damit, dass die Schnitte kantendrittelnd geführt werden.

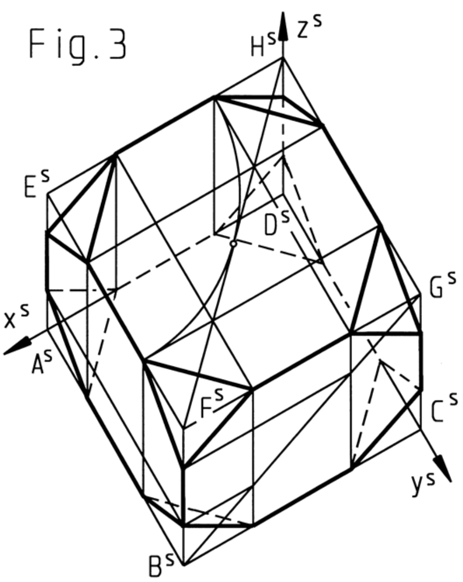
Da – im Unterschied zu den kantenhalbierenden Schnitten – nunmehr auf jeder Kante des Ausgangskörpers zwei Ecken des neuen Körpers liegen, ergibt sich die Eckenanzahl e des Archimedischen Körpers durch Verdoppeln der Kantenanzahl des Platonischen Körpers, aus dem er hervorgeht: $e = 2k^*$. Durch jede Ecke gehen drei Kanten, an jeder von ihnen sind aber zwei Ecken beteiligt, sodass für jeden Archimedische Körper dieser Art $k = (3e) : 2 = 1{,}5 \cdot e$ ($= 3k^*$) gilt.

Die fünf nach dieser Methode aus den Platonischen Körpern hervorgehenden Archimedischen Körper werden als *abgestumpfte Formen* der fünf regelm. Polyeder bezeichnet.

Das *abgestumpfte Tetraeder* ist ein von vier gleichseitigen Dreiecken (als Schnittflächen) und vier regelm. Sechsecken begrenzter Achtflächner mit zwölf Ecken. In Fig. 1 wird vom Aufriss eines regelm. Tetraeders in einfachster Aufstellung ausgegangen. Für das Kantendritteln nach dem Strahlensatz ist nützlich, dass die Flächenhöhen des Tetraeders vom jeweiligen Flächenschwerpunkt im Verhältnis 2 : 1 geteilt werden. Der Umkugelmittelpunkt M des Tetraeders ist auch der Mittelpunkt der Umkugel des abgestumpften Tetraedes. Deren zweiter Umrisskreis ist im Aufriss eingezeichnet.

Das *abgestumpfte Hexaeder* ist ein von acht gleichseitigen Dreiecken (als Schnittflächen) und sechs regelm. Achtecken begrenzter Archimedischer Körper. Fig. 3 zeigt diesen in einem Horizontalriss. Das Einschreiben des regelm. Achtecks in die quadratische Deckfläche erfolgt nach der einschlägigen Konstruktion, siehe den Viertelkreisbogen mit dem Mittelpunkt E^s durch den Quadratmittelpunkt.

Fig. 3



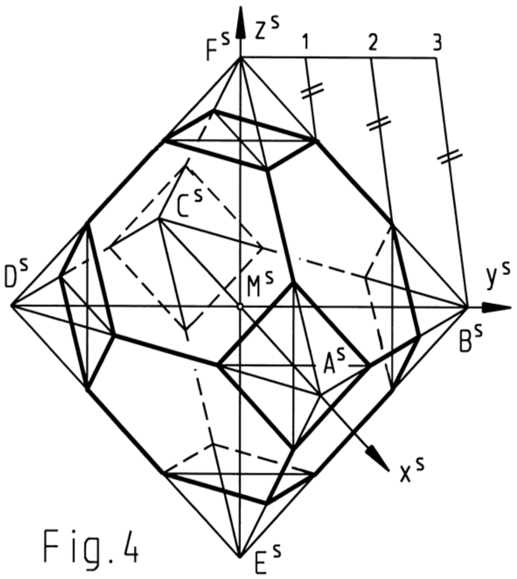


Fig. 4

Das *abgestumpfte Oktaeder* ist ein von sechs Quadraten (als Schnittflächen) und acht regelm. Sechsecken begrenzter Archimedischer Körper, wie er in Fig. 4 dargestellt ist. Die Kantendrittelung erfolgt nach der einschlägigen Konstruktion.

Das *abgestumpfte Dodekaeder* ist ein von 20 gleichseitigen Dreiecken (als Schnittflächen) und zwölf regelm. Zehnecken begrenzter Archimedischer Körper. Er entsteht, wenn allen Begrenzungsflächen eines regelm. Dodekaeders regelm. Zehnecke eingeschrieben werden und die Schnittführung danach erfolgt.

Ein *abgestumpftes Ikosaeder* ergibt sich aus einem regelm. Ikosaeder durch Kantendrittelung. Es wird von zwölf regelm. Fünfecken (als Schnittflächen) und 20 regelm. Sechsecken begrenzt (Fig. 5).

Weil an jeder Ecke dieses Archimedischen Körpers ein Fünfeck und zwei Sechsecke zusammentreffen, was eine Winkelsumme von 2·120° + 108° = 348° zur Folge hat und damit schon ziemlich nahe an 360° herankommt, ist dieses Objekt ziemlich „rund“ und eignet sich seine Oberfläche daher als Kugelersatzfläche.

Bekanntermaßen wird diese Tatsache gerne für das Herstellen von Bällen (bzw. deren Hüllen) genützt.

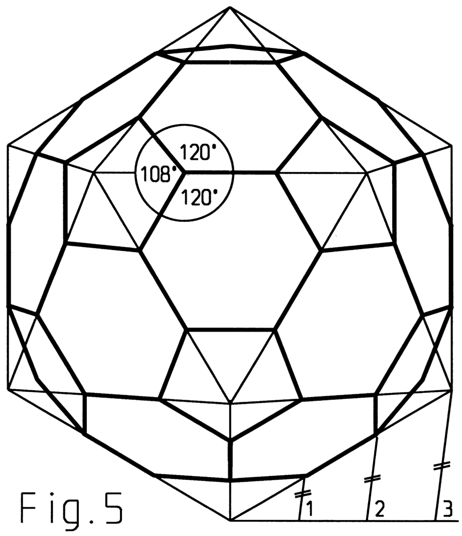


Fig. 5

Die folgende Tabelle gibt für die fünf auf diese (zweite) Art der Schnittführung aus Platonischen Körpern abgeleiteten Archimedischen Körper die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten sowie das Erfülltsein des Eulerschen Polyedersatzes an.

Art der Begrenzungsflächen	f	e	k	f + e - k
4 gleichseitige Dreiecke und 4 regelm. Sechsecke	8	12	18	2
8 gleichseitige Dreiecke und 6 regelm. Achtecke	14	24	36	2
6 Quadrate und 8 regelm. Sechsecke	14	24	36	2
20 gleichseitige Dreiecke und 12 regelm. Zehnecke	32	60	90	2
12 regelm. Fünfecke und 20 regelm. Sechsecke	32	60	90	2

Das Rhombenkuboktaeder

In dem bereits genannten Aufsatz der Universität Bremen – aber nicht nur dort – wird unter diesem Namen ein Archimedischer Körper vorgestellt, der sich nicht durch Eckenabschneiden aus einem Platonischen Körper ableiten lässt. Dieser semireguläre 26-Flächner wird von 18 Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Die Quadrate sind so angeordnet, dass je acht von ihnen drei Ringe in Form von Mänteln eines regelm. achtseitigen Prismas bilden, wodurch ein Hohlraum mit acht Öffnungen entsteht, welche durch die Dreiecke geschlossen werden.

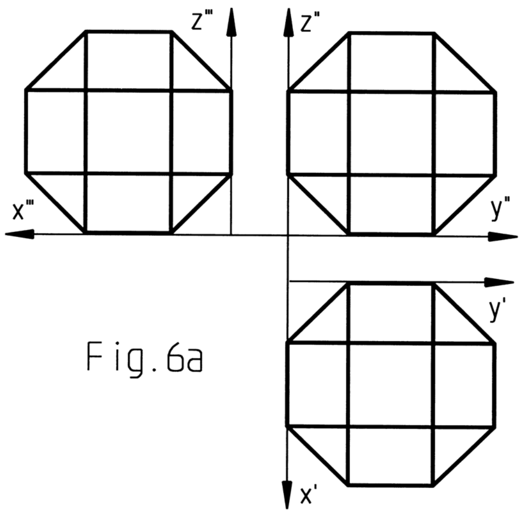


Fig. 6a

Fig. 6a zeigt das Objekt in den drei Hauptrissen, die von gleicher Form und Größe sind. Die acht Ecken des regelm. Achtecks und die vier Ecken des Quadrats bilden jeweils zwei Ecken des Archimedischen Körpers ab, woraus sich dessen Eckenanzahl e = 24 ergibt. In Fig. 6b wird der Körper durch einen Horizontalriss veranschaulicht, der (wie auch die letzte Zeichnung) mit dem GeoGebra-Zeichenprogramm hergestellt worden ist. In jeder Ecke laufen vier Kanten zusammen, was insgesamt 24·2 = 48 Kanten ergibt. Der Eulersche Polyedersatz ist erfüllt: 26 + 24 = 48 + 2. Wie der Würfel ABCDEFGH, dem er eingeschrieben ist, besitzt dieser Körper neun Symmetrieebenen.

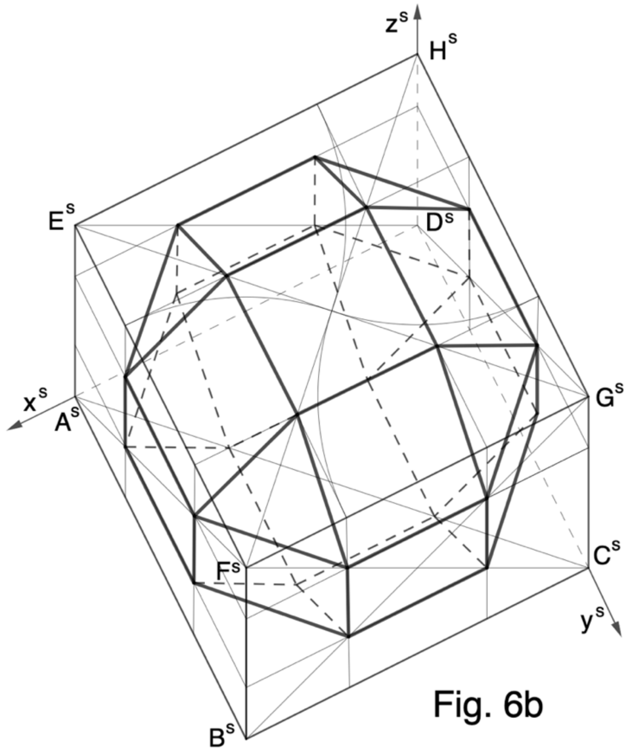


Fig. 6b

Schlussbemerkungen

1. Hinsichtlich der Bezeichnung „Rhombenkuboktaeder" für den zuletzt vorgestellten Archimedischen Körper habe ich im Internet eine Erklärung gefunden, mit der ich gar nichts anfangen kann: „Der Name beruht auf der Tatsache, dass zwölf seiner 18 Quadrate deckungsgleich zu den zwölf Rhomben (Rauten) eines Rhombendodekaeders sind." (Ein Rhombendodekaeder ist ein von zwölf kongruenten Rauten begrenzter Zwölfflächner mit 14 Ecken und 24 Kanten. Der Eulersche Polyedersatz ist erfüllt.)

2. Auf der Website www.mathematische-basteleien.de – aber nicht nur dort – wird unter dem Stichwort „Großes Rhombenkuboktaeder" ein weiterer Archimedischer Körper mit 26 Begrenzungsflächen vorgestellt; eine Begründung für diese Namensgebung fehlt. Allerdings wird bemerkt, dass kein Geringerer als Johannes Kepler gemeint hat, dabei handle es sich um einen durch Eckenabschneiden aus einem Kuboktaeder hervorgehenden Körper und sei daher die Bezeichnung „Abgestumpftes Kuboktaeder" angebracht. In dem von der Universität Bremen ins Netz gestellten Aufsatz wird dieser von zwölf Quadraten, acht regelm. Sechsecken und sechs regelm. Achtecken begrenzte Archimedische Körper tatsächlich unter diesem Namen geführt. Aber die Kanten eines – etwa durch Kantendrittelung, damit wenigstens regelm. Sechsecke entstehen – abgestumpften Kuboktaeders sind nicht alle gleich lang, wie anhand von Fig. 2 leicht nachvollziehbar ist: Jede Ecke des Kuboktaeders wird von zwei gleichseitigen Dreiecken (mit 60°-Winkeln) und zwei Quadraten (mit 90°-Winkeln) gebildet. Daher sind die Schnittflächen keine Quadrate, sondern Rechtecke mit dem Seitenverhältnis $1 : \sqrt{2}$. Allerdings: Hinsichtlich der Anzahl der Flächen (26), Ecken ($4 \cdot 12 = 48$) und Kanten ($24 + 4 \cdot 12 = 72$) stimmt das wirkliche *abgestumpfte Kuboktaeder* mit dem *Großen Rhombenkuboktaeder* überein, und die Rechnung $26 + 48 = 72 + 2$ bestätigt den Eulerschen Polyedersatz.

Anhang: Das Ikosidodekaeder

Eine nähere Beschäftigung mit diesem durch kantenhalbierende Schnitte sowohl aus einem regelm. Dodekaeder wie auch aus einem regelm. Ikosaeder erzeugbaren Archimedischen Körper mit 32 Flächen, 30 Ecken und 60 Kanten führt zu einigen recht bemerkenswerten Ergebnissen. So überziehen etwa alle Kanten den Körper in sechs Ketten in Form regelm. Zehnecke, deren Trägerebenen durch den Umkugelmittelpunkt M gehen und die sechs Ebenenstellungen einnehmen, welche auch die paarweise parallelen Dodekaederflächen besitzen.

In der nachstehenden Zeichnung ist ein solches regelm. Zehneck als oberer Rand einer „Schale“ zu sehen, die von den unteren 16 Flächen eines Ikosidodekaeders gebildet wird, die durch kantenhalbierendes Eckenabschneiden aus der unteren Hälfte eines regelm. Dodekaeders hervorgeht. Dieses Ausgangsobjekt wird so konstruiert wie im Aufsatz „Planare Graphen und der Eulersche Polyedersatz“ angegeben und nur bei ihm sind alle Ecken (mit A, B, C, D und E für das in der Grundrissebene π_1 liegende Basisfünfeck, die „mittleren“ Ecken B_1, B_2, B_3, B_4 und B_5 sowie die „Hochpunkte“ C_1, C_2, C_3, C_4 und C_5) beschriftet, im Aufriss allerdings nur die sichtbaren. Daraus ergeben sich dann alle Ecken der „Schale“ als Halbierungspunkte der Dodekaederkanten. Die Bilder des ersten Umrisskreises u_1 und des zweiten Umrisskreises u_2 der Umkugel des Ikosidodekaeders ergänzen die Zeichnung.