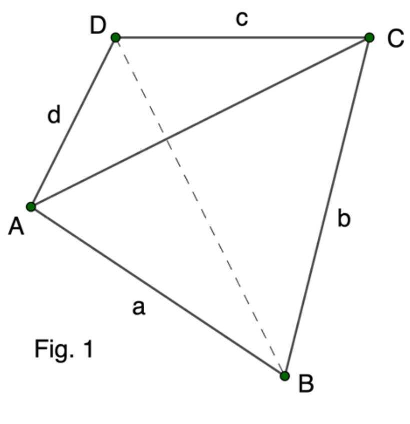
Planare Graphen
und der Eulersche Polyedersatz

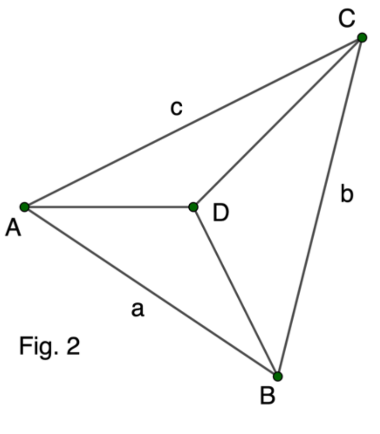
Von Dieter Grillmayer

In den inzwischen über 60 Jahren, in denen ich zum Teil recht intensiv in die Welt der Geometrie eingetaucht bin, ist mir der im ersten Teil dieses Textes definierte und erläuterte geometrische Sachverhalt niemals untergekommen. Darauf bin ich erst vor Kurzem im Rahmen einer Recherche zum *Eulerschen Polyedersatz* gestoßen und werde hier auch nur das wiedergeben, was ich aus diversen diesbezüglichen Internet-Seiten herausgelesen habe. Zum Polyedersatz selbst ist zu sagen, dass er mich ob seiner Universalität immer fasziniert hat, was ich in einer kleinen Arbeit zum Ausdruck bringen und weitergeben wollte, wie das im zweiten Teil dieses Aufsatzes dann auch geschieht.

Planare Graphen

Ein *planarer Graph* ist eine ebene Figur mit Ecken und deren Verbindungsstrecken, die gegebenenfalls auch Vielecke begrenzen können. Im Folgenden werden die Ecken als *Knoten* bezeichnet und die Vielecke als *Gebiete*. **Für die Summe aus der Anzahl der Knoten und der Anzahl der Gebiete gilt die Regel, dass diese stets um zwei größer ist als die Anzahl der in dem Graphen enthaltenen Verbindungsstrecken.** Die Regel gilt mit der Maßgabe, dass einander die im Graphen enthaltenen Strecken nur in Knoten schneiden dürfen und dass bei der Anzahl der Gebiete das *Außengebiet*, das ist der durch kein anderes Gebiet besetzte Teil der Zeichenfläche, stets mitzuzählen ist. Anhand der folgenden Figuren 1 und 2 soll diese Regel erläutert und deren Zustandekommen plausibilisiert werden.





Besteht der Graph nur aus einem einzelnen Knoten A, so ist das Außengebiet die ganze Zeichenfläche und es gibt keine Verbindungsstrecke, womit die Regel mit 1 + 1 = 0 + **2**, im Weiteren als *Ausgangsgleichung* bezeichnet, erfüllt ist. Kommt ein zweiter Knoten B und damit die Verbindungsstrecke a dazu, so wird die Ausgangsgleichung links und rechts um 1 erweitert und bleibt daher richtig; kommt ein dritter Knoten C und damit eine zweite Verbindungsstrecke b dazu, so wird die Ausgangsgleichung links und rechts um 2 erweitert und bleibt daher ebenfalls richtig. Nun besteht erstmals die Möglichkeit, durch das Verbinden von C mit A ein dreieckiges Gebiet zu schaffen und damit erhöht sich die Ausgangsgleichung links und rechts um 1, wodurch 3 + 2 = 3 + **2** entsteht; oder es wird ein vierter Knoten D samt Verbindungsstrecke dorthin hinzugefügt, was die Gleichung 4 + 1 = 3 + **2** ergibt. Die Figuren 1 und 2 zeigen die kompletten planaren vierknotigen Graphen für den Fall, dass der vierte Knoten außerhalb bzw.

innerhalb des Dreiecks ABC liegt. Fig. 1 belegt die Regel anhand der Gleichung 4 + 3 = 5 + **2** und hinsichtlich Fig. 2 gilt 4 + 4 = 6 + **2**.

Konvexe Polyeder und der Eulersche Polyedersatz

Ein *Polyeder* („Vielflächner“) ist ein geometrischer Körper, der ausschließlich von ebenen Flächen begrenzt wird, und ein solches Polyeder nennt man *konvex*, wenn für je zwei auf der Oberfläche oder im Inneren des Körpers liegende Punkte die Verbindungsstrecke zwischen diesen Punkten vollständig im Polyeder liegt. Hinsichtlich der Anzahl e der Ecken, f der Begrenzungsflächen und k der Kanten eines konvexen Polyeders gilt die Gleichung

$$\boxed{e + f = k + 2}$$

Dieser schon Renè DESCARTES bekannte Sachverhalt wurde von Leonhard EULER 1758 bewiesen und ist daher, siehe Überschrift, nach diesem benannt worden, wiewohl der Eulersche Beweis mangelhaft ist, worauf Henry LEBESQUE 1924 hingewiesen hat. Aber bereits 1813 veröffentlichte der französische Mathematiker Augustin Louis Cauchy einen exakten Beweis, worin er eine Verbindung zu planaren Graphen herstellt, bei denen die obige Formel hinsichtlich der Anzahl e der Knoten, der Anzahl f der Gebiete und der Anzahl k der Verbindungsstrecken gilt.

Der Zusammenhang lässt sich wie folgt veranschaulichen: Entfernt man beim Polyeder eine Begrenzungsfläche und zieht die angrenzenden Kanten so auseinander, dass schließlich alle Ecken und Kanten in einer Ebene liegen, so erhält man einen planaren Graphen, der hinsichtlich seiner Knoten mit der Anzahl e der Ecken, hinsichtlich der Anzahl der Gebiete mit der Anzahl f der Begrenzungsflächen, wobei die entnommene Fläche durch das Außengebiet kompensiert wird, und hinsichtlich der Anzahl der Verbindungsstrecken mit der Anzahl k der Kanten des Polyeders übereinstimmt. Die Länge der Kanten und die Form der Flächen bleibt bei dieser Transformation natürlich nicht erhalten.

Als erstes Beispiel kann das (allgemeine) Tetraeder mit vier Ecken, vier dreieckigen Begrenzungsflächen und sechs Kanten gelten, was mit der Gleichung 4 + 4 = 6 + **2** den Eulerschen Polyedersatz bestätigt und wofür Fig. 2 ein planarer Graph ist. Hinsichtlich Fig. 1 ist zu bemerken, dass es dazu kein räumliches Analogon gibt und wird damit auch belegt, dass die Abbildung konvexer Polyeder auf planare Graphen nicht umkehrbar ist.

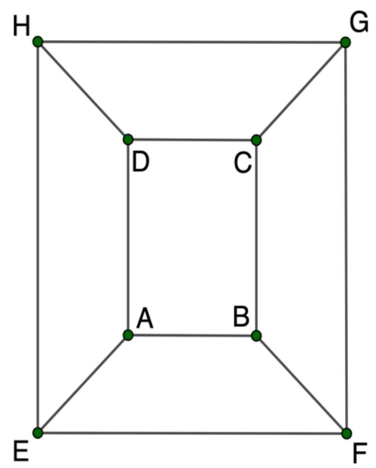
Pyramiden und Prismen

Diese aus dem Mathematikunterricht geläufigen geometrischen Körper bestätigen recht einfach die oben genannte Gleichung. Eine (allgemeine) *n-seitige Pyramide* kann als konvexes Polyeder mit einem n-Eck (ohne einspringende Ecken) als *Grundfläche* und n dreieckigen *Mantelflächen* definiert werden, die einander in n Seitenkanten schneiden und zu einem nicht in der Trägerebene der Grundfläche liegenden Punkt S, die *Spitze* der Pyramide, hinführen. Diese und die n Ecken der Grundfläche ergeben zusammen e = 1 + n Ecken des Körpers, und die Grundfläche zusammen mit den n Mantelflächen ergeben f = 1 + n Begrenzungsflächen. Der Summe e + f = 2 + 2n stehen k = 2n Kanten, nämlich die n Kanten der Grundfläche und die n Seitenkanten, gegenüber, womit der Eulersche Polyedersatz erfüllt ist. Für n = 3 handelt es sich um das bereits genannte (allgemeine) Tetraeder samt seinen Sonderfällen, den regelm. dreiseitigen Pyramiden und insbesondere den regelm. Tetraedern.

Regelmäßig werden n-seitige Pyramiden dann genannt, wenn alle Seitenkanten gleich lang, daher alle Mantelflächen gleichschenklige Dreiecke sind und die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist.

Ein (allgemeines) *n-seitiges Prisma* kann als konvexes Polyeder definiert werden, das von einem n-Eck (ohne einspringende Ecken) als *Grundfläche*, einer daraus durch Parallelverschiebung hervorgehenden *Deckfläche* sowie von n *Mantelflächen* in Form von Parallelogrammen begrenzt wird. Der Körper hat somit e = 2n Ecken (das sind die je n Ecken von Grund- und Deckfläche) sowie f = 2 + n Flächen (Grund- und Deckfläche sowie n Mantelflächen) und k = 3n Kanten (n Grundkanten, n Deckkanten und n Seitenkanten), was die Gleichung e + f = k + 2 als 2n + (2 + n) = 3n + 2 bestätigt.

Von einem *geraden Prisma* wird gesprochen, wenn die Seitenkanten zur Grund- und Deckfläche normal sind; dazu gehört insbesondere der von sechs paarweise parallelen und kongruenten Rechtecken begrenzte *Quader*. Die Zeichnung rechts kann als planarer Graph eines Quaders ABCDEFGH interpretiert werden, der durch Entfernen des Rechtecks EFGH und Verlagerung der auseinandergezogenen Randkanten in die Trägerebene des Rechtecks ABCD zustande gekommen ist.



Regelmäßig werden n-seitige Prismen dann genannt, wenn sie gerade sowie Grund- und Deckfläche regelmäßige Vielecke sind.

Regelmäßige Polyeder

Keine Abhandlung über den Eulerschen Polyedersatz kann darauf verzichten, die *regulären Polyeder* als markante Beispiele für seine Gültigkeit zu benennen. Dabei handelt es sich um konvexe Polyeder, die von lauter kongruenten regelmäßigen Vielecken begrenzt werden. Folgende „schöne" Überlegung lässt uns erkennen, dass es genau fünf Arten von Körpern mit dieser Eigenschaft gibt: Begrenzungsflächen können nur dann eine Körperecke bilden, wenn die dabei auftretende Summe der von den Kanten gebildeten Winkel unter 360° Grad liegt. Handelt es sich bei den regelm. Vielecken also um gleichseitige Dreiecke, dann können drei (Winkelsumme 180°), vier (Winkelsumme 240°) oder fünf (Winkelsumme 300°) davon eine Ecke bilden. Handelt es sich dagegen um Quadrate (90°-Innenwinkel) oder um regelmäßige Fünfecke (108°-Innenwinkel), so können nur je drei von ihnen (Winkelsumme 270° bzw. 324°) eine Ecke bilden. Regelm. Sechsecke (mit 120°-Innenwinkeln) kommen als Begrenzungsflächen eines regelm. Polyeders also nicht mehr in Frage.

Die fünf Arten von regelm. Polyedern, die zu Ehren des großen griechischen Philosophen PLATON (428/427 bis 348/347 v. Chr.) und dessen Ideenlehre, nach der sich Ideen durch „ewige Vollkommenheit und absolute Realität" (z. B. „das Schöne an sich") auszeichnen, auch als *Platonische Körper* bezeichnet werden, leiten ihre Benennung von der Anzahl ihrer Begrenzungsflächen ab:

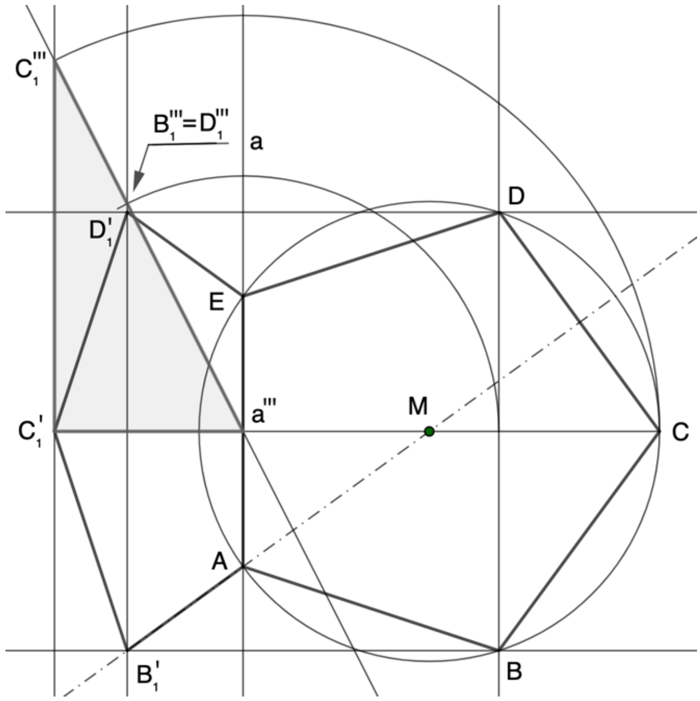
a) *Regelm. Tetraeder*, die auch zu den Pyramiden gehören und von vier kongruenten gleichseit. Dreiecken begrenzt werden, was vier Ecken und sechs Kanten zur Folge hat.

b) *Regelm. Hexaeder*, üblicherweise als *Würfel* bezeichnet, werden von sechs kongruenten und paarweise parallelen Quadraten begrenzt, was acht Ecken und zwölf Kanten zur Folge hat.

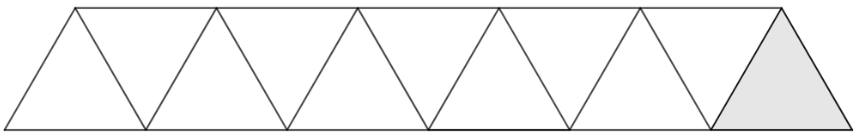
c) *Regelm. Oktaeder* werden von acht kongruenten gleichseit. Dreiecken begrenzt, die als Mantelflächen von zwei quadratischen Pyramiden aufgefasst werden können, welche die Grundfläche gemeinsam haben. Das hat sechs Ecken (= die vier Quadratecken und die zwei Pyramidenspitzen) sowie zwölf Kanten (= die vier Quadratseiten und die acht Seitenkanten der zwei Pyramiden) zur Folge.

d) *Regelm. Dodekaeder* werden von zwölf kongruenten regelm. Fünfecken begrenzt. Zwei „halbe“ Oberflächen dieses Körpers lassen sich als zwei „Schalen“ auffassen, die aus einem regelm. Fünfeck als Bodenfläche und fünf aneinanderhängenden regelm. Fünfecken als Seitenflächen bestehen.

Die Figur rechts zeigt nur ein solches Fünfeck $AB_1C_1D_1E$ und wie es durch Drehung des Fünfecks ABCDE um die Achse a zustande kommt. (B_1' muss auf der Winkelsymmetalen durch A liegen und daraus ergibt sich das Profildreieck.) Die untere „Schale“ enthält fünf Basiskanten, fünf mittlere und zehn obere Kanten (AB_1 und ED_1 bzw. B_1C_1 und C_1D_1 sind je zwei davon). Die zehn Oberkanten decken sich mit den Randkanten einer zweiten „Schale“ gleicher Bauart, die der unteren übergestülpt wird. Das Dodekaeder besitzt somit 20 Ecken (fünf untere, fünf obere und zehn mittlere) sowie 30 Kanten, erfüllt daher die Bedingung e + f - k = 20 + 12 – 30 = 2.



e) *Regelm. Ikosaeder* werden von zwanzig kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Ihre Struktur ist vergleichsweise leicht zu durchschauen, wenn wir etwa elf gleichseitige Dreiecke in der unten gezeigten Anordnung auf leichten Karton zeichnen, ausschneiden, an allen Kanten falten und die beiden äußeren Dreiecke deckungsgleich zusammenkleben.



Der dadurch entstehende „Ring“ hat zwei Ränder in Form regelm. Fünfecke. Das Ikosaedermodell ist komplett, wenn man diese Ränder mit den aus je fünf gleichseit. Dreiecken bestehenden Mänteln zweier Pyramiden verbindet. Diese zwei Pyramiden haben zusammen zwölf Ecken, und das sind auch alle Ecken des Polyeders. Je zehn Kanten der beiden Pyramiden und zehn Kanten des „Ringes“ ergibt zusammen 30 Kanten, sodass die Bedingung e + f - k = 12 + 20 – 30 = 2 auch für das regelm. Ikosaeder erfüllt ist.

Zusammenfassung:	e	f	k	e + f - k
Tetraeder	4	4	6	2
Hexaeder	8	6	12	2
Oktaeder	6	8	12	2
Dodekaeder	20	12	30	2
Ikosaeder	12	20	30	2

Die Kantenzahl von Polyedern, die von lauter Flächen mit gleicher Eckenzahl begrenzt werden, lässt sich auch wie folgt aus deren Eckenzahl e oder aus deren Flächenzahl f berechnen: Da durch jede Ecke drei (Tetraeder, Würfel, Dodekaeder), vier (Oktaeder) oder fünf (Ikosaeder) Kanten hindurchgehen, an jeder Kante aber zwei Ecken beteiligt sind, gilt für die Kantenzahl 3e : 2 bzw. 4e : 2 bzw. 5e : 2. Und da jede Fläche drei (Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder), vier (Würfel) oder fünf (Dodekaeder) Seiten hat, aber je zwei davon nur eine Kante bilden, gilt für die Kantenzahl 3f : 2 bzw. 4f : 2 bzw. 5f : 2.

Zuletzt sei noch auf die sogenannte „Dualität“ verwiesen, in der einander Hexaeder und Oktaeder sowie Dodekaeder und Ikosaeder entsprechen, indem die Eckenzahl des einen Körpers mit der Flächenzahl des anderen übereinstimmt und umgekehrt. In diesem Sinn ist das Tetraeder zu sich selbst „dual“.