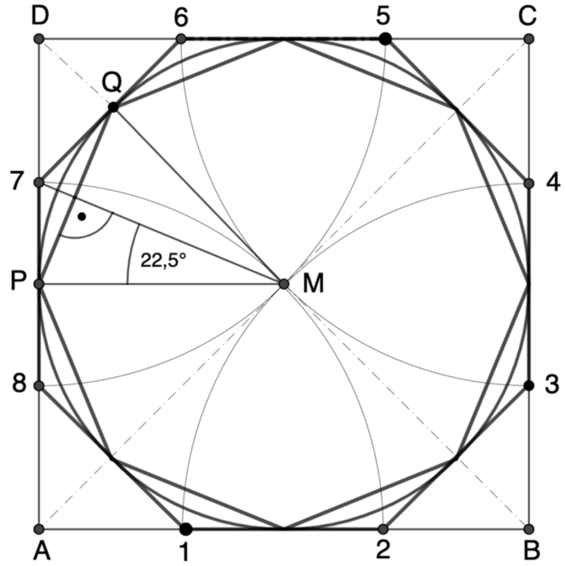
Rund ums regelmäßige Achteck

Von Dieter Grillmayer

Jedem Kreis k (Mittelpunkt M, Radius r) kann ein regelm. Achteck mit der Seitenlänge $a = \overline{PQ}$ eingeschrieben und ein regelm. Achteck 12345678 mit der Seitenlänge s umschrieben werden. Hinsichtlich der Maße beschränken wir uns im Weiteren auf einen Kreis mit dem Radius $r = 1$ Le (= Längeneinheit). Für $r \neq 1$ wären die angegebenen Längen mit r und die angegebenen Flächeninhalte mit r^2 zu multiplizieren.



Aus dem gleichschenkligen Dreieck MPQ ergibt sich $\sin 22{,}5° = \frac{a}{2} : 1$, daher $a = 2 \cdot \sin 22{,}5°$ Le und für seine Höhe $h = \cos 22{,}5°$ Le.

Für diese Funktionswerte gelten die Formeln $\sin 22{,}5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ und $\cos 22{,}5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, wie im Anhang noch zu beweisen sein wird. Daraus ergibt sich $a = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ Le, und für den Flächeninhalt des Dreiecks MPQ ergibt sich $\frac{a \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ Fe (= Flächeneinheiten). Davon sind der Umfang u_i des „inneren“ Achtecks und sein Flächeninhalt F_i das jeweils Achtfache und müssen beide Werte kleiner sein als der Umfang $u = 2\pi$ Le bzw. der Flächeninhalt $F = \pi$ Fe des dem Achteck umschriebenen Kreises k. Mit $u_i \approx 6{,}123$ Le und $F_i \approx 2{,}828$ Fe ist das der Fall.

Hinsichtlich des dem Kreis k umschriebenen („äußeren“) Achtecks 12345678 zeigt die obige Figur eine wirklich (be)merkenswerte Konstruktion mit Hilfe eines dem Kreis k umschriebenen Quadrats ABCD. Dessen Eckpunkte sind die Mittelpunkte von vier Kreisbögen durch die Kreismitte M, welche die Quadratseiten in jeweils zwei Eckpunkten des Achtecks schneiden. Als Beweis kann bereits die Ähnlichkeit der gleichschenkligen Dreiecke M1B und M2A mit dem Dreieck 12M dienen, was Letzteres als achten Teil eines regelm. Achtecks ausweist. Etwas aufwändiger ist die folgende Rechnung, welche belegt, dass die Länge der Seite 12 mit jener der Seite 23 übereinstimmt: $\overline{12} = \overline{23} = s$.

Die Quadratseiten haben die Länge $2r = 2$ Le und die genannten Kreisbögen haben als Halbmesserlängen die jeweils halbe Länge der Quadratdiagonalen, das sind jeweils $\sqrt{2}$ Le. Das bedeutet z. B. für $\overline{A1} = \overline{2B} = 2 - \sqrt{2}$ Le und daher für $s = \overline{12} = \overline{AB} - \overline{A1} - \overline{2B} = 2 - 2 \cdot (2 - \sqrt{2}) = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)$ Le. Und die Seite 23 ist die Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge $\overline{2B} = \overline{B3} = 2 - \sqrt{2}$ Le und hat daher die Länge $s = \sqrt{2} \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)$ Le, was zu beweisen war.

Der Umfang u_a des umschriebenen Achtecks beträgt demnach $8s = 16 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 6{,}627$ Le, was um etwa 0,344 Le mehr ist als der Kreisumfang. Seinen Flächeninhalt F_a erhält man als Differenz aus dem Inhalt 4 Fe des Quadrats ABCD und dem Inhalt von zwei Quadraten mit den Seitenlängen $2 - \sqrt{2}$ Le, das macht $4 - 2 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 \approx 3{,}314$ Fe, also um etwa 0,127 Fe mehr als die Kreisfläche.

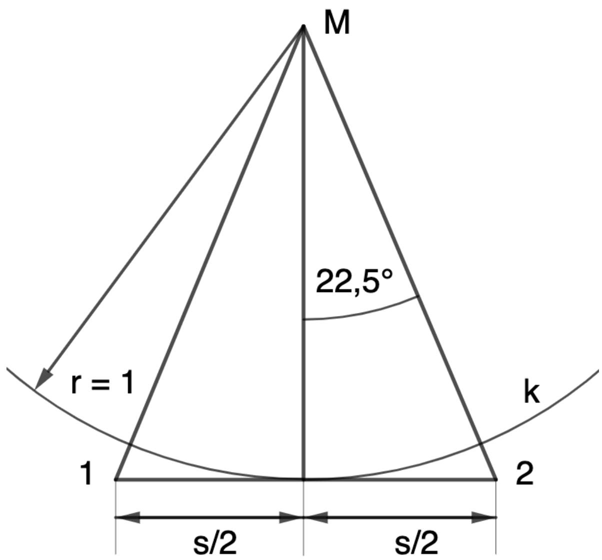
Anhang

Hinsichtlich der folgenden Rechnungen werden die trigonometrischen Fundamentalformeln $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ sowie der Summensatz $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$ als bekannt vorausgesetzt.

Aus dem Summensatz folgt unmittelbar $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ und wegen $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ weiter $\cos(2\alpha) = 1 - 2\cdot\sin^2\alpha$ oder $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ und schließlich $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}}$. Aus dieser Formel lässt sich zu jedem Winkelwert $0° \leq \alpha° \leq 180°$ der zugehörige Sinuswert berechnen, sofern es sich um die Hälfte eines Winkels handelt, von dem der Cosinuswert bekannt ist.

Wegen $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ folgt daraus, wie bereits angegeben und verwendet, $\sin 22{,}5° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, woraus sich mit Hilfe der Fundamentalformeln auch die Werte $\cos 22{,}5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ und $\tan 22{,}5° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}-2}{2} = \frac{2\cdot(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{2} - 1$ herleiten lassen.

Letzterer Zahl sind wir schon bei der Berechnung der Seitenlänge s des dem Einheitskreis k umschriebenen regelm. Achtecks begegnet. Warum das so ist belegt die nebenstehende Figur, welche eines der acht gleichschenkligen Dreiecke zeigt, aus denen sich das umschriebene Achteck zusammensetzt. In ihm besitzt die Höhe und Ankathete des 22,5°-Winkels die Länge r = 1 Le und die zugehörige Gegenkathete ist eine halbe Achtecksseite. Daher gilt $\tan 22{,}5° = \sqrt{2} - 1 = \frac{s}{2} : 1$, also $s = 2\cdot(\sqrt{2} - 1)$ Le, wie das bereits auf einem ganz anderen Weg berechnet worden ist.



dgm/15.10.22