Kongruenzrechnung und Teilbarkeitsregeln

Von Dieter Grillmayer

Diese kleine Arbeit präzisiert die in meinem bei „Books on Demand" im Jahr 2021 herausgebrachten Algebra-Buch unter „Kongruenzgleichungen" (Seite 110 – 112) getroffenen Aussagen, um mit deren Hilfe die wichtigsten Teilbarkeitsregeln zu beweisen. In diesem Zusammenhang haben wir es mit folgenden Zahlenmengen zu tun, nämlich der Menge der ganzen Zahlen Z, der Menge der natürlichen Zahlen N und der Menge $N_0 = N \cup \{0\}$.

Division mit Rest:

Für jede nichtnegative ganze Zahl $a \in N_0$ und $m \in N$ lässt sich eine *Division mit Rest* mit Hilfe des bekannten Divisionsalgorithmus durchführen, wie er anhand des folgenden Beispiels mit a =2638 und m = 7demonstriert wird:

```
 2638 : 7 = 376
-21
  53
 -49
   48
  -42
    6
```

Darin wird 376 als *Quotient* q und 6 als *Rest* r bezeichnet. Der Quotient q gibt an, wie oft die Zahl m in a enthalten ist und der Rest r mit $0 \le r < m$ gibt an, wieviel zum Produkt $q \cdot m$ noch dazugezählt werden muss, um die Zahl a zu erreichen. Für r = 0 ist die Zahl a *teilbar* durch die Zahl m. Die Formel

$$\boxed{a = q \cdot m + r}$$

gilt zunächst einmal als Probe, in unserem Fall also $2638 = 376 \cdot 7 + 6 = 2632 + 6 = 2638$. Die Formel erlaubt aber auch eine Erweiterung der für a geltenden Zahlenmenge von N_0 auf Z dergestalt, dass sich auch negative a nach dieser Formel eindeutig zerlegen lassen, wobei in diesem Fall $q < 0$ ist und für r die Bedingung $0 \le r < m$ weiterhin Geltung haben muss.

Beispiele: Für a = -23 und m = 7 gilt $-23 = (-4) \cdot 7 + 5$, also q = -4 und r = 5. Für a = -96 und m = 12 gilt $-96 = (-8) \cdot 12 + 0$, also q = -8 und r = 0, die Zahl -96 ist (ebenso wie die *Gegenzahl* 96) durch 12 teilbar. Für a = -150 und m = 20 gilt $-150 = (-8) \cdot 20 + 10$, also q = -8 und r = 10.

Restklassen und Zahlkongruenzen:

Die Menge Z lässt sich durch Zusammenfassen aller Zahlen, welche bezüglich einer Zahl $m \in N$, im Weiteren als *Modul* bezeichnet, denselben Rest r ergeben, in Teilmengen zerlegen, welche als *Restklassen modulo m* bezeichnet werden. Das folgende Beispiel beschreibt die Restklassenmenge R_4 und enthält auch die dabei gerne verwendete Symbolik hinsichtlich der vier darin enthaltenen Restklassen.

Beispiel: $R_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ mit $\overline{0} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$, $\overline{1} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$, $\overline{2} = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$ und $\overline{3} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$. Alle Elemente der Restklasse $\overline{0}$ sind durch 4 teilbar, und das gilt natürlich auch ganz allgemein hinsichtlich jenes Moduls m und der zugehörigen Restklasse $\overline{0}$.

Jede Restklassenmenge R_m enthält m Restklassen und es lassen sich in ihr sowohl eine Addition wie auch eine Multiplikation definieren, welche auf die Zahlen zurückgreift, welche sich in den zwei betroffenen Restklassen befinden. Hinsichtlich dieser zwei Verknüpfungen bildet R_m einen *Ring*, was aber hier, weil für die im Weiteren behandelten Problemstellungen unmaßgeblich, nicht weiterverfolgt wird. (Näheres zu den *Restklassenringen* findet sich in meinem Algebra-Buch auf den Seiten 19 und 20.)

Je zwei Zahlen a und b, welche derselben Restklasse angehören, werden als *kongruent modulo m* bezeichnet, wofür das Symbol $\equiv$ eingeführt worden ist und das folgende Kriterium gilt:

$$\boxed{a \equiv b \bmod m \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \bmod m}$$

In Worten: Sind zwei ganze Zahlen a und b kongruent modulo m, so ist deren Differenz $a - b$ kongruent 0 modulo m, also durch m teilbar, und umgekehrt. Der recht einfache Beweis beruht auf der Tatsache, dass bei Differenzbildung von $a = q_1 \cdot m + r$ und $b = q_2 \cdot m + r$ der Rest r wegfällt und daher $a - b = q_1 \cdot m - q_2 \cdot m = (q_1 - q_2) \cdot m$, also eine durch m teilbare Zahl ist.

Umformen von Kongruenzgleichungen:

Je zwei durch das Kongruenzsymbol $\equiv$ miteinander verbundene Terme bestimmen eine *Kongruenzgleichung* und $a \equiv b \bmod m$ ist die einfachste Gestalt einer solchen, die jedenfalls richtig bleibt, wenn man die Konstanten durch dazu kongruente ganze Zahlen ersetzt. Desgleichen bleibt die Gleichung richtig, wenn links und rechts dieselbe Konstante addiert wird, weil diese durch Subtraktion gemäß obiger Formel wieder wegfällt, und sie bleibt auch richtig, wenn die linke und rechte Seite mit derselben ganzen Zahl $k \neq 0$ multipliziert wird. Denn die Differenzbildung ergibt dann $a \cdot k - b \cdot k = (a - b) \cdot k \equiv 0 \bmod m$, weil $a - b$ und damit auch jedes Vielfache davon eine durch m teilbare Zahl ist.

Diese Gesetzmäßigkeiten gelten sinngemäß auch dann, wenn in einer Kongruenzgleichung Variable auftreten, und entsprechende Umformungen erlauben es, diese zu „lösen“, also die Feststellung der Restklasse modulo m, deren Zahlen die Kongruenzgleichung erfüllen. Darauf wird in meinem Algebrabuch insofern näher eingegangen, als mit Hilfe von Kongruenzgleichungen ganzzahlige Lösungen von linearen Gleichungen der Form $ax + by + c = 0$ mit von 0 verschiedenen ganzzahligen Koeffizienten ermittelt werden können.

Die hier verfolgte Absicht, die wichtigsten Teilbarkeitsregeln zu beweisen, erfordert jedoch nur die Anwendung der Regel, in ganzzahligen Summen jeden Summanden durch einen dazu kongruenten austauschen zu dürfen und dass im Falle von $a \equiv 0 \bmod m$ auch jedes Vielfache von a durch m teilbar ist.

Teilbarkeitsregeln:

Spätestens für das Bruchrechnen, in meinen Augen die erste wirkliche Herausforderung im Rahmen des Mathematikunterrichts, ist die Kenntnis der wichtigsten Teilbarkeitsregeln unerlässlich, als solche die Teilbarkeit ganzer Zahlen durch 2, durch 3, durch 4, durch 5, durch 8, durch 9, durch 10 und durch 11 betreffen. Durch die folgenden Kongruenzrechnungen kann recht einfach belegt werden, warum diese Regeln gelten. Die Beweise werden auf vierstellige positive ganze Zahlen mit der Tausenderziffer t, der Hunderterziffer h, der Zehnerziffer z und der Einerziffer e beschränkt, sodass also thze = $1000t + 100h + 10z + e$ gilt, könnten aber noch beliebig ausgeweitet werden.

Für die Teilbarkeit durch 2 gelten somit die Gleichungen $1000t + 100h + 10z + e \equiv 0 + 0 + 0 + e = e \equiv 0 \mod 2$. Es kommt in diesem Fall also nur darauf an, ob die Einerstelle (und damit die ganze Zahl) gerade ist oder nicht.

Für die Teilbarkeit durch 3 gelten die Gleichungen $1000t + 100h + 10z + e = (999 + 1)\cdot t + (99 + 1)\cdot h + (9 + 1)\cdot z + e = 999t + t + 99h + h + 9z + z + e \equiv 0 + t + 0 + h + 0 + z + e = t + h + z + e \equiv 0 \mod 3$. Eine ganze Zahl ist also genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre *Quersumme* $t + h + z + e$ durch 3 teilbar ist.

Für die Teilbarkeit durch 4 gelten die Gleichungen $1000t + 100h + 10z + e \equiv 0 + 0 + 10z + e = 10z + e \equiv 0 \mod 4$. Bei der Teilbarkeit durch 4 kommt es also nur darauf an, ob das zweistellige „Ende“ der Zahl durch 4 teilbar ist.

Für die Teilbarkeit durch 5 gelten die Gleichungen $1000t + 100h + 10z + e \equiv 0 + 0 +0 + e = e \equiv 0 \mod 5$. Eine ganze Zahl ist also genau dann durch 5 teilbar, wenn die Einerstelle durch 5 teilbar ist.

Für die Teilbarkeit durch 8 gelten die Gleichungen $1000t + 100h + 10z + e \equiv 0 + 100h + 10z + e = 100h + 10z + e \equiv 0 \mod 8$. Bei der Teilbarkeit durch 8 kommt es also nur darauf an, ob das dreistellige „Ende“ der Zahl durch 8 teilbar ist. Allerdings könnte man auch $(96 + 4)\cdot h + (8 + 2)\cdot z + e = 96h + 4h + 8z + 2z + e \equiv 0 + 4h + 0 + 2z + e = 4h + 2z + e \equiv 0 \mod 8$ verwenden, was relativ leicht merkbar ist und etwa für die Zahl $768 \equiv 28 + 12 + 8 = 48 \equiv 0 \mod 8$ ergibt.

Für die Teilbarkeit durch 9 gelten die Gleichungen $1000t + 100h + 10z + e = (999 + 1)\cdot t + (99 + 1)\cdot h + (9 + 1)\cdot z + e = 999t + t + 99h + h + 9z + z + e \equiv 0 + t + 0 + h + 0 + z + e = t + h + z + e \equiv 0 \mod 9$. Eine ganze Zahl ist also genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre *Quersumme* $t + h + z + e$ durch 9 teilbar ist.

Für die Teilbarkeit durch 10 gilt $1000t + 100h + 10z + e \equiv 0 + 0 +0 + e = e \equiv 0 \mod 10$. Eine ganze Zahl ist also genau dann durch 10 teilbar, wenn sich die Einerstelle durch 10 teilen lässt, was offensichtlich nur für $e = 0$ der Fall ist.

Für die Teilbarkeit durch 11 gelten die Gleichungen $1000t + 100h + 10z + e = (1001 – 1)\cdot t + (99 + 1)\cdot h + (11 – 1)\cdot z + e = 1001t – t + 99h + h + 11z – z + e \equiv 0 – t + 0 + h + 0 – z + e = -t + h – z + e \equiv 0 \mod 11$. Eine ganze Zahl ist also genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre *Querdifferenz* $e – z + h – t$ durch 11 teilbar ist.