Drehquadriken und deren Volumina

Von Dieter Grillmayer

Jede Gleichung T(x, y, z) = 0, in welcher der Term T ein *Polynom zweiten Grades* (= quadratisches Polynom) in drei Variablen ist, bestimmt eine *Fläche zweiter Ordnung* in dem Sinn, als alle Lösungstripel der Gleichung die Koordinaten der auf der Fläche liegenden Punkte bilden und diese Fläche von jeder Geraden des R_3 in maximal zwei reellen Punkten durchstoßen wird. Im Bereich des zweidimensionalen Raumes R_2 entsprechen diesen *räumlichen Quadriken* die ebenen *Kurven zweiter Ordnung*, auch als *ebene Quadriken* oder als *Kegelschnitte* bezeichnet, die durch Gleichungen T(x, y) = 0 dargestellt werden, in denen der Term T ein Polynom zweiten Grades ist.

Drehflächen zweiter Ordnung werden im Weiteren als *Drehquadriken* bezeichnet und ebenso alle Körper, die von solchen Flächen begrenzt werden. Dabei handelt es sich um *Drehparaboloide*, *Drehellipsoide* und *Drehhyperboloide,* wenn diese Flächen/Körper durch Drehen einer *Parabel*, *Ellipse* oder *Hyperbel* um eine ihrer Symmerieachsen zustandekommen. Vergleichsweise einfache Sonderfälle von Drehquadriken sind alle *Drehzylinder*(-flächen) und *Drehkegel*(-flächen) sowie die *Kugeln* als spezielle Drehellipsoide. Ein Realitätsbezug ist insofern gegeben, als Drehquadriken bzw. durch achsennormale Schnitte begrenzte Teile davon als Gebrauchsgegenstände, insbesondere als Hohlkörper, z. B. als Trinkgefäße, Vasen und Schüsseln, Verwendung finden, was daher auch Volumsberechnungen nützlich erscheinen lässt.

Eine vollständige Behandlung des Themas verlangt nach einer Einführung zu den Volumsberechnungen von Drehkörpern durch Integration, wie sie im Mathematikunterricht an Allgemeinbildenden Höheren Schulen in der achten Klasse geboten wird, aber auch nach einer zweckmäßigen, auf Drehquadriken zugeschnittenen Erweiterung. Sodann bietet es sich an, die *Normalformen* der Parabel-, Ellipsen- und Hyperbelgleichungen aus den *Ortsliniendefinitionen* der betreffenden Kurven herzuleiten, weil diese ja für die Volumsberechnungen zwingend erforderlich sind.

1. Volumsberechnungen von Drehkörpern durch Integration

Lässt man die Kurve einer Funktion y = f(x) bzw. ein Teilstück davon, für welches $y \geq 0$ gilt, um die x-Achse eines Koordinatenystems Uxy rotieren, so entsteht ein *Drehkörper*. Die einfachsten Beispiele dazu sind *Drehzylinder* (Fig. 1) und *Drehkegel* (Fig. 2) wenn die Funktionskurve eine zur x-Achse parallele bzw. dieselbe schneidende Gerade g ist. Durch entsprechende Rotation eines Kreises k, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, entsteht eine *Kugel* (Fig. 3). Die verschiedenen Lagen der erzeugenden Kurve stellen die *Meridiane* des Drehkörpers dar.

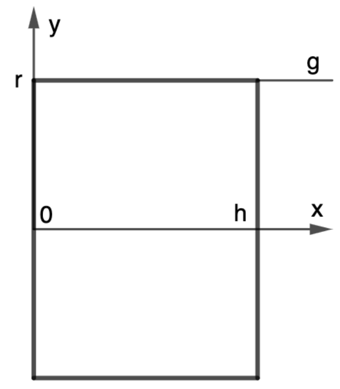

Fig. 1

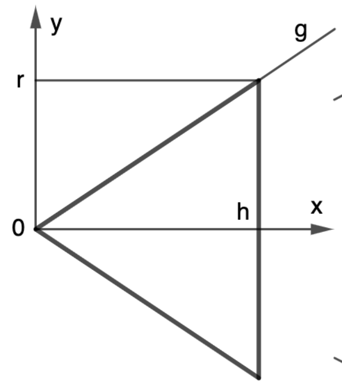

Fig. 2

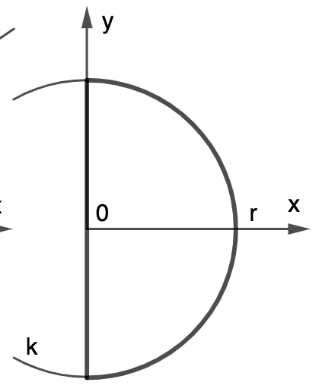

Fig. 3

Die hier vorgestellte Methode zur Berechnung des Volumens aller auf diese Art und Weise entstehenden Drehkörper beruht auf der durch Integration erfolgenden Summierung einer unendlich großen Anzahl von Drehzylindervolumina $V_i = r_i^2\pi \cdot dx$; darin sind die verschiedenen r_i die y-Werte der Funktion f(x), und dx ist das Differential, welches als Höhe jedes Teilzylinders einen unendlich kleinen Abschnitt auf der x-Achse des Systems Uxy beschreibt. Voraussetzung ist, dass die Funktion in einem bestimmten, die Höhe h des Körpers umfassenden Intervall integrierbar sein muss. Diese Überlegungen kommen in der folgenden Formel zum Ausdruck:

$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx}$$

In ihr ist der konstante Faktor π aller Summanden bereits herausgehoben. O. B. d. A. kann $0 \leq a < b$ angenommen werden und $b - a = h$ ist dann die Höhe des Drehkörpers. Für den Drehzylinder (Fig. 1*)* ergibt sich daraus wegen der Geradengleichung y = r das Volumen

$$V_Z = \pi \cdot \int_0^h r^2 \cdot dx = [\pi \cdot r^2 x]_0^h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

und für den Drehkegel (Fig. 2) wegen der Geradengleichung $y = kx = \frac{r}{h} \cdot x$ das Volumen

$$V_{Ke} = \pi \cdot \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \cdot dx = \left[\pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

Das in obiger Formel enthaltene y^2 erhält man bei einer Funktionsgleichung y = f(x) immer durch das Quadrieren von f(x). Es kann aber im Falle einer durch eine Gleichung T(x, y) = 0 gegebenen Kurve, sofern diese die Variable y nur „zum Quadrat" enthält, auch direkt durch Umformen dieser Gleichung (Explizitmachen von y^2) ermittelt werden. So folgt aus der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ unmittelbar $y^2 = r^2 - x^2$ und daraus das Kugelvolumen

$$V_{Ku} = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r (r^2 - x^2) \cdot dx = 2\pi \cdot \left[\left(r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^r = 2\pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = 2\pi \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn die Kreisgleichung nach $x^2 = r^2 - y^2$ umgeformt und dann die Rechnung nach der Formel

$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot dy}$$

durchgeführt wird. Das weist darauf hin, dass Kurven, die einer Gleichung T(x, y) = 0 genügen, auch bei Rotation um die y-Achse eine Drehfläche erzeugen können, deren Volumen dann nach letztgenanner Formel berechenbar ist, sofern die Variable x in der Kurvengleichung nur „zum Quadrat" oder nur linear auftritt. In diesem Fall wird das x auf einer Seite isoliert und die umgeformte Gleichung sodann quadriert.

Der theoretische Hintergrund stimmt mit dem durch Drehung einer Kurve um die x-Achse bereits geschilderten im Prinzip vollkommen überein, nur dass in diesem Fall eine unendlich große Anzahl von Drehzylindervolumina $V_i = r_i^2\pi \cdot dy$ durch Integration summiert wird, wobei die r_i mit den x-Werten der Kurve übereinstimmen und das dy als ein unendlich kleiner Abschnitt auf der y-Achse als Höhe fungiert. Voraussetzung ist wiederum, dass die Funktion mit der Gleichung x = g(y) in einem bestimmten, die Höhe h des Körpers umfassenden Intervall integrierbar sein muss.

2. Allgemeine Bemerkungen zur Kegelschnittsgeometrie

Die Kegelschnittsgeomertie wird in meinem Buch „Im Reich der Geometrie I" in den Abschnitten 3.4, 4.8 und 4.10 detailliert behandelt. Hier erfolgen nur ein paar Bemerkungen dazu ohne Beweise.

Die allgemeinste Form einer Kegelschnittsgleichung lautet $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, in der $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ sein muss, weil die Gleichung sonst linear wäre. Die Zahl $R = B^2 - 4AC$ bestimmt die Art des Kegelschnitts: Für $R > 0$ handelt es sich um eine Hyperbel oder um zwei einander in einem eigentlichen Punkt S schneidende reelle Gerade, für $R < 0$ um eine Ellipse oder um zwei einander in einem reellen Punkt S schneidende imaginäre Gerade und für $R = 0$ um eine Parabel oder um zwei parallele Gerade, die auch zusammenfallen können („Doppelgerade"). Der *Hauptlage* eines Kegelschnitts entspricht eine *Normalform* von dessen Gleichung mit $(B, D, E) = (0, 0, 0)$ für $R \neq 0$ bzw. mit $(B, F) = (0, 0)$ und $A = 0$ oder $C = 0$ sowie $D = 0$ oder $E = 0$ für $R = 0$. Für $B = 0$ hat der Kegelschnitt immer eine *achsenparallele Lage*, d. h. seine zwei Symmetrieachsen sind zu den Koordinatenachsen parallel bzw. ist seine einzige Symmetrieachse zu einer Koordinatenachse parallel.

Mein Buch „Im Reich der Geometrie II" enthält in Abschnitt 4.4 die räumliche Begründung für den Namen „Kegelschnitte" und den Beweis, dass es sich um Ellipsen (Fig. 4), Parabeln (Fig. 5) oder Hyperbeln (Fig. 6) handelt. Dieser wird mit Hilfe DANDELINscher Kugeln geführt, durch welche sich die Ortsliniendefinitionen bestätigen lassen.

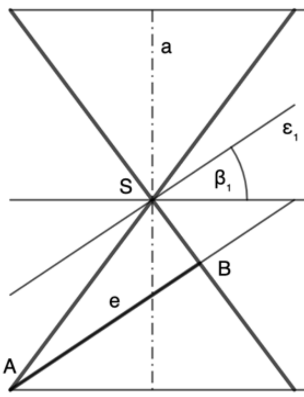

Fig. 4

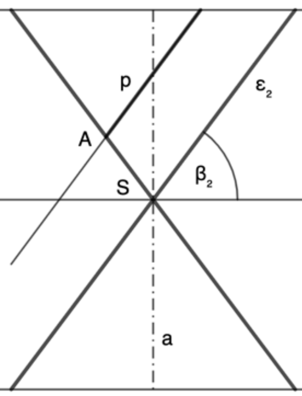

Fig. 5

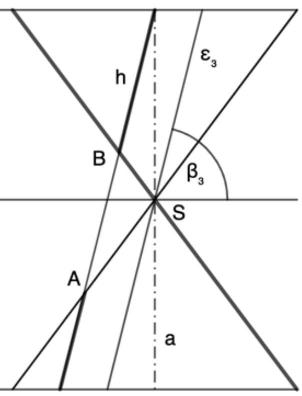

Fig. 6

Die drei Figuren belegen auch die bereits genannten Sonderfälle von Kegelschnitten mit Hilfe der durch S gelegten Ebenen ε_1 (nur ein reeller Punkt S), ε_2 (Berührerzeugende = Doppelgerade) und ε_3 (zwei reell getrennte Gerade). Die zwei reellen parallelen Geraden ergeben sich beim achsenparallelen Schnitt eines Drehzylinderfläche, welche ja als jene Sonderform einer Drehkegelfläche auftritt, bei der S der Fernpunkt der Achse a ist. Die Gleichungen dieser „zerfallenden" Kegelschnitte lassen sich in ein Produkt von zwei linearen Termen aufspalten, z. B. $x^2 - y^2 = (x - y).(x + y) = 0$.

3. Parabeln in Hauptlage und die Normalformen von deren Gleichungen

Nach deren Ortsliniendefinition ist eine *Parabel* der Ort aller Punkte einer Ebene, die von einem *Brennpunkt* F und einer *Leitgeraden* l jeweils gleich weit entfernt sind. Fig. 7 zeigt dies anhand des Kurvenpunktes P mit $\overline{PF} = \overline{PL}$. (Das graue Dreieck weist auf die Berechnung von $\overline{PF}$ hin.) Parabeln besitzen nur eine Symmetrieachse, die F enthält, zu l normal ist und den *Parabelscheitel* A trägt, welcher von F und l jeweils im Abstand $\frac{p}{2}$ entfernt ist. Algebraisch wird eine Parabel in *erster Hauptlage* (Fig. 7) im Achsensystem Axy wie folgt dargestellt:

$$\overline{PF} = \overline{PL} \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow \mathbf{y^2 = 2px}$$

Wegen A = B = 0 und C = 1 gilt R = 0 – 4.0.1 = 0, wie angekündigt.

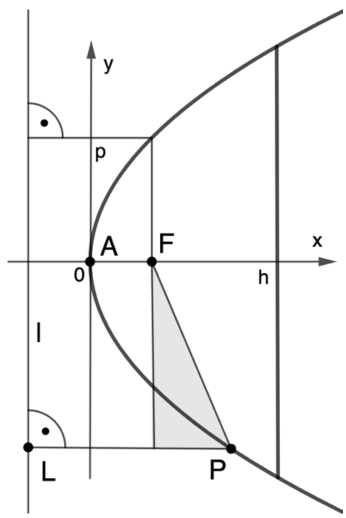

Fig. 7

Eine Parabel befindet sich in *zweiter Hauptlage*, wenn ihre Achse die y-Achse und sie nach oben offen ist, die *zweite Normalform* ergibt sich durch Vertauschen x ↔ y als $\mathbf{x^2 = 2py}$ oder $\mathbf{y = \frac{1}{2p} \cdot x^2}$ (Funktionsgleichung) mit p > 0. Für p < 0 ergibt sich im Falle von $y^2 = 2px$ eine nach links offene Parabel (*dritte Hauptlage*) bzw. für $x^2 = 2py$ eine nach unten offene Parabel (*vierte Hauptlage*).

4. Das Volumen der Drehparaboloide

Das Volumen V_P des durch Drehung der Parabel in erster Hauptlage um ihre Achse erzeugten und rechts im Abstand h von A durch einen Schnittkreis begrenzten Drehkörpers ergibt sich durch Integration wie folgt:

$$\boxed{V_P = \pi \cdot \int_0^h 2px \cdot dx = \pi \cdot [p \cdot x^2]_0^h = \pi \cdot p \cdot h^2}$$

Das durch Rotation einer Parabel in zweiter Hauptlage um die y-Achse entstehende Drehparaboloid ist zum oben behandelten kongruent und gehorcht natürlich auch derselben Volumsformel.

<u>Beispiel 1:</u> Ein Trinkglas von annähernd drehparaboloidförmiger Gestalt wird mit einem Achtel Liter Wein gefüllt, der darin 5 cm hoch steht und dessen Oberfläche einen Kreis von 8 cm Durchmesser bildet. Überprüfe anhand dieser Daten die Volumsformel für Drehparaboloide.

Die Anschauung legt hier eine lotrechte Drehachse und ein nach oben offenes Glas nahe, sodass die Parabelgleichung $x^2 = 2py$ mit r = x = 4 cm und h = y = 5 cm hier vorzuziehen ist. Das ergibt durch Einsetzen des Zahlenpaares (4, 5) den Parameter $p = \frac{16}{10} = 1{,}6$ und durch Einsetzen in die Volumsgleichung $V_P = \pi \cdot 1{,}6 \cdot 25 = 40 \cdot \pi \approx 125{,}6637 \text{ cm}^3$. <u>Die Volumsformel dürfte also stimmen.</u>

5. Ellipsen in Hauptlage und die Normalformen von deren Gleichungen

Nach deren Ortsliniendefinition ist eine *Ellipse* der Ort aller Punkte einer Ebene, die von zwei festen *Brennpunkten* F_1 und F_2 eine konstante Abstandssumme 2a aufweisen. Fig. 8 zeigt dies anhand des Kurvenpunktes P mit $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$. (Die beiden grauen Dreiecke weisen auf die Berechnung von $\overline{PF_1}$ und $\overline{PF_2}$ hin.) Ellipsen besitzen zwei aufeinander normal stehende Symmetrieachsen, die einander im Symmetriezentrum M schneiden. Die *Hauptachse* enthält die Brennpunkte und die beiden *Hauptscheitel* A und B mit $\overline{AB} = 2a$, die Nebenachse enthält die beiden *Nebenscheitel* C und D mit $\overline{CD} = 2b$ mit $b \leq a$. Im Achsensystem Mxy gilt für die in Fig. 8 gewählt *zweite Hauptlage* von Ellipsen $F_1(0/e)$ und $F_2(0/-e)$ mit $e^2 = a^2 - b^2$, wie $\overline{F_1D} + \overline{DF_2} = 2a$ und z. B. das Dreieck MDF_1 belegt. Diese Formel geht in die Herleitung der *zweiten Normalform* der Kurvengleichung wie folgt ein:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Rightarrow \sqrt{x^2 + (e-y)^2} + \sqrt{x^2 + (e+y)^2} = 2a$$

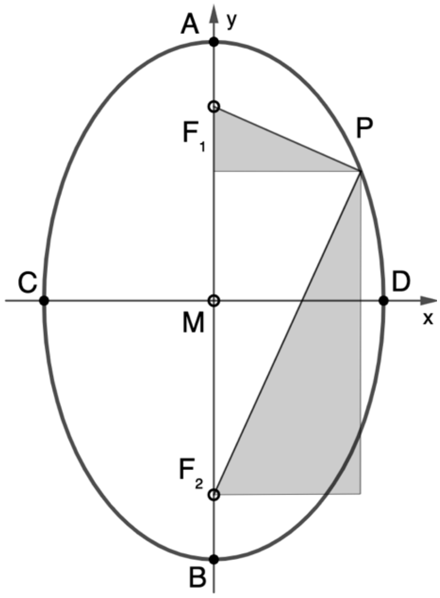

Fig. 8

Trennen der Wurzeln und erstmaliges Quadrieren führt zu $ey + a^2 = a \cdot \sqrt{x^2 + e^2 + 2ey + y^2}$. Durch nochmaliges Quadrieren der Gleichung und das Ersetzen von e^2 durch $a^2 - b^2$ kommt man schließlich zu der Gleichung $\mathbf{a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2}$ aller Ellipsen in zweiter Hauptlage. Bei den Ellipsen in *erster Hauptlage* liegen die Brennpunkte und Hauptscheitel auf der x-Achse. Die Kurvengleichung lautet in diesem Fall $\mathbf{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2}$. Nach den in der allgemeinen Kurvengleichung verwendeten

Koeffizienten-Bezeichnungen ist A = a^2 und C = b^2 oder umgekehrt und B = 0, somit R = $B^2 - 4AC =$ $= 0 - a^2b^2 < 0$, wie angekündigt.

6. Das eiförmige Drehellipsoid und sein Volumen

Durch Drehen einer Ellipse um ihre Hauptachse entsteht ein *eiförmiges Drehellipsoid*. Zur Berechnung seines Volumens V_E ist die zweite Hauptform in $x^2 = \frac{a^2b^2-b^2y^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - y^2)$ umzuformen, woraus sich durch Integration die folgende Formel ergibt:

$$\boxed{V_E = 2\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - y^2) \cdot dy = 2\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \left[a^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3} \cdot ab^2\pi}$$

<u>Beispiel 2:</u> Ein Trinkglas hat die Form eines 2,5 cm oberhalb des Mittelpunkts M normal zur Hauptachse abgeschnittenen eiförmigen Drehellipsoids mit den Maßen a = 5 cm und b = 4 cm. Ist dieses Objekt als Viertel-Liter-Weinglas verwendbar oder nicht?

Zur Veranschaulichung kann Fig. 8 dienen. Die untere Hälfte des Trinkglases hat ein Volumen von $\frac{2ab^2\pi}{3} = \frac{2\cdot 5\cdot 16\cdot \pi}{3} = \frac{160\pi}{3} \approx 167{,}55\ \mathrm{cm}^3$. Damit fehlen auf 250 cm^3 noch 82,45 cm^3, und zur Verfügung steht nach oben hin noch eine 2,5 cm hohe Ellipsoidschichte. Die Kurvengleichung $25x^2 + 16y^2 = 400$ lässt sich auf $x^2 = \frac{16}{25} \cdot (25 - y^2)$ umformen, was als Schichtvolumen V = $0{,}64 \cdot \pi \cdot \int_0^{2{,}5} (25 - y^2) \cdot dy = 0{,}64 \cdot \pi \cdot \left[25y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{2{,}5} = 0{,}64 \cdot \pi \cdot \left(62{,}5 - \frac{15{,}625}{3}\right) = 0{,}64 \cdot \pi \cdot \frac{171{,}877}{3} \approx 115{,}19\ \mathrm{cm}^3$ ergibt. <u>Das beschriebene Objekt ist somit als Viertel-Liter-Weinglas geeignet.</u>

7. Das linsenförmige Drehellipsoid und sein Volumen

Beim Drehen einer Ellipse um ihre Nebenachse entsteht ein *linsenförmiges Drehellipsoid*. Für sein Volumen V_L ergibt sich aus der zweiten Hauptform der Ellipsengleichung die Gleichung $y^2 = \frac{a^2b^2-a^2x^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} \cdot (b^2 - x^2)$ und durch Integration die folgende Formel:

$$\boxed{V_L = 2\pi \cdot \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (b^2 - x^2) \cdot dx = 2\pi \cdot \frac{a^2}{b^2} \left[b^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{4}{3} \cdot a^2b\pi}$$

Für a = b = r folgt aus beiden Ellipsoidformeln die bekannte Formel für das Kugelvolumen $V_{Ku} = \frac{4r^3\pi}{3}$.

<u>Beispiel 3:</u> Die Erde hat annähernd die Form eines linsenförmigen (oder *abgeplatteten*) Drehelipsoids, das *Referenzellipsoid* genannt wird und für das a ≈ 6.378 km und b ≈ 6.357 km gilt. Wie groß ist dessen Volumen V_L und in welchem Verhältnis steht das Volumen V_e der das Referenzellipsoid in den beiden Polen berührenden eingeschriebenen Kugel zu V_L sowie von V_L zum Volumen V_u der die Erde längs des Äquators berührenden umschriebenen Kugel?

$V_e \approx 1.076.081.700.000\ \mathrm{km}^3$, $V_L \approx 1.083.203.000.000\ \mathrm{km}^3$, $V_u \approx 1.086.781.300.000\ \mathrm{km}^3$

<u>$V_e : V_L : V_u \approx 0{,}993 : 1 : 1{,}003$</u>

8. Hyperbeln in Hauptlage und die Normalformen von deren Gleichungen

Nach ihrer Ortsliniendefinition ist eine *Hyperbel* der Ort aller Punkte einer Ebene, die von zwei festen *Brennpunkten* F_1 und F_2 eine konstante Abstandsdifferenz 2a aufweisen. Fig. 9 zeigt dies anhand des

Kurvenpunktes P mit $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right|$ = 2a. (Die beiden grauen Dreiecke weisen auf die Berechnung von $\overline{PF_1}$und $\overline{PF_2}$ hin.) Hyperbeln besitzen zwei aufeinander normal stehende Symmetrieachsen, die einander im Symmetriezentrum M schneiden. Die *Hauptachse* enthält die Brennpunkte und die beiden *Scheitel* A und B mit $\overline{AB} = 2a$, die Nebenachse enthält zwei Punkte C und D mit $\overline{CD} = 2b$. Im Achsensystem Mxy gilt für die in Fig. 9 gewählt *erste Hauptlage* von Hyperbeln $F_1(0/\text{-}e)$ und $F_2(0/e)$ mit $e^2 = a^2 + b^2$, wie der Kreis k(M, e) belegt. Die Kurve nähert sich ihren beiden *Asymptoten* e und f mit den Gleichungen $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x$ mit zunehmendem $|x \cdot y|$ immer mehr an. Die Herleitung der *ersten Normalform* der Hyperbelgleichung erfolgt analog zur gleichartigen Ellipsengleichung aus folgendem Ansatz:

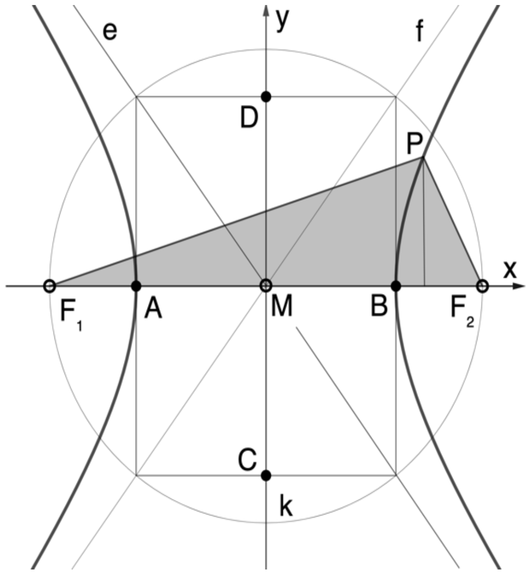

Fig. 9

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a \Rightarrow \left|\sqrt{(e+x)^2 + y^2} - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}\right| = 2a$$

Trennen der Wurzeln und erstmaliges Quadrieren führt zu $ex - a^2 = a\cdot\sqrt{e^2 + x^2 - 2ex + y^2}$. Durch nochmaliges Quadrieren der Gleichung und das Ersetzen von e^2 durch $a^2 + b^2$ kommt man schließlich zur Gleichung $\mathbf{b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2}$ aller Hyperbeln in erster Hauptlage. Bei den Hyperbeln in *zweiter Hauptlage* liegen die Brennpunkte und Hauptscheitel auf der y-Achse, die Asymptotengleichungen lauten $y = \pm\frac{a}{b}\cdot x$ und die Kurvengleichung lautet in diesem Fall $\mathbf{b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2}$ (= *zweite Normalform*). Nach den in der allgemeinen Kurvengleichung verwendeten Koeffizienten-Bezeichnungen ist $A = b^2$ und $C = -a^2$ oder umgekehrt sowie B = 0, somit $R = B^2 - 4AC = 0 + a^2b^2 > 0$, wie angekündigt.

Spezielle Fälle sind – wie die Kreise unter den Ellipsen – die *gleichseitigen Hyperbeln* mit a = b, also den Normalformen $x^2 - y^2 = a^2$ bzw. $y^2 - x^2 = a^2$ und zwei aufeinander normal stehenden Asymptoten $y = \pm x$, welche als *erste* und *zweite Mediane* bekannt sind.

9. Das einschalige Drehhyperboloid und sein Volumen

Durch Drehen einer Hyperbel gemäß Fig. 9 um ihre Nebenachse entsteht ein *einschaliges Drehhyperboloid*. Ein durch zwei Parallelkreise begrenztes Teilstück dieser Fläche tritt z. B. bei Blumenvasen, aber auch als Mantel von Kühltürmen in Erscheinung bzw. kann ich mich an eine für unsere Kleinkinder angeschaffte Gehschule erinnern, deren unten und oben von einem metallenen Kreisring begrenztes Netz diese Gestalt hatte. Eine solche Netzbespannung ist möglich, weil eine einschalige Drehhyperboloidfläche auch durch das Drehen einer Geraden g, die zur Drehachse a windschief ist, erzeugt werden kann, deren verschiedene Lagen g_1, g_2, g_3, … eine die Fläche überziehende *Geradenschar* bilden. Eine zweite Schar mit derselben Eigenschaft ergibt sich aus der ersten durch planare Spiegelung z. B. an der Ebene, in welcher der *Kehlkreis* (= Bahnkreis der Scheitel A und B) der Fläche liegt. (Die gemeinsame Normale n von a und g schneidet a in M und g in einem Kehlkreispunkt.)

Volumsberechnungen an einschaligen Drehhyperboloiden mit lotrechter Drehachse a verlangen danach, diese durch zwei Parallelkreise zu begrenzen, für deren Trägerebenen hinsichtlich des unteren Kreises die Gleichung y = u und hinsichtlich des oberen Kreises die Gleichung y = o gelten soll. Die für diese Lage geltende erste Normalform der Kurvengleichung ist in $x^2 = \frac{a^2b^2 + a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}\cdot(b^2 + y^2)$ umzuformen. Somit lautet die Formel für das Volumen V_{H1} des beschriebenen Drehkörpers:

$$V_{H1} = \pi \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \int_u^o (b^2 + y^2) \cdot dx = \pi \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \left(b^2 o + \frac{o^3}{3} - b^2 u - \frac{u^3}{3}\right)$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt sich aus $\pi \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \int_u^o (b^2 + y^2) \cdot dx = \pi \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \left[b^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_u^o$

Beispiel 4: Der Hohlraum einer Blumenvase hat die Form eines 20 cm hohen einschaligen Drehhyperboloids mit dem Kehlkreisradius a = 2 cm und einer 12 cm über dem Kehlkreis gelegenen oberen Öffnung mit dem Radius r = 4 cm. Wieviel Wasser kann die Vase fassen?

Die Hyperbelgleichung lautet $b^2x^2 - 4y^2 = 4b^2$ und (4, 12) ist eine ihrer Lösungen, somit gilt: $16b^2 - 4b^2 = 4 \cdot 144 \Rightarrow b^2 = \frac{4 \cdot 144}{12} = 48 \Rightarrow x^2 = \frac{4 \cdot 48 + 4 \cdot y^2}{48} = \frac{48 + y^2}{12} \Rightarrow V_{H1} = \frac{\pi}{12} \cdot \left[48y + \frac{y^3}{3}\right]_{-8}^{12} =$
$= \frac{\pi}{12} \cdot \left(576 + 576 - 48 \cdot (-8) - \frac{(-8)^3}{3}\right) = \frac{\pi}{12} \cdot \left(1152 + 384 + \frac{512}{3}\right) \approx$ 446,8 cm^3.

.

10. Das zweischalige Drehhyperboloid und sein Volumen

Es entsteht durch Drehung einer Hyperbel um ihre Hauptachse und besteht demnach aus zwei kongruenten Schalen, die nach links bzw. rechts offen sind. Für Volumsberechnungen bietet sich wohl nur eine der beiden von einem Kreis begrenzten Schalen von einer bestimmten Höhe h an, die den Abstand der Kreisebene vom Scheitel angibt. Für die Integration nach der Formel $V_{H2} = \pi \cdot \int_a^{a+h} y^2 \cdot dx$ benötigt man das explizite $y^2 = \frac{b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x^2 - a^2)$ aus der ersten Normalform der Hyperbelgleichung.

$$V_{H2} = \pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \int_a^{a+h} (x^2 - a^2) \cdot dx = \pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{h^3}{3} + a \cdot h^2\right)$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt sich aus $\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \int_a^{a+h} (x^2 - a^2) \cdot dx = \pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - a^2 \cdot x\right]_a^{a+h} =$

$$\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{a^3}{3} + a^2 \cdot h + a \cdot h^2 + \frac{h^3}{3} - a^3 - a^2 \cdot h - \frac{a^3}{3} + a^3\right)$$

Beispiel 5: Der Hohlraum einer Keramikschüssel hat die Form einer Schale eines Drehhyperboloids, das durch Rotation einer gleichseitigen Hyperbel um ihre Hauptachse zustandekommt. Die Schüssel ist h = 10 cm hoch und der obere kreisförmige Rand hat einen Radius von r = 14 cm. Wieviel Flüssigkeit kann diese Schüssel aufnehmen?

Die Anschauung legt hier eine lotrechte Drehachse und die obere Schale des Drehhyperboloids nahe, Fig. 9 wäre daher um 90° zu drehen, und die Hyperbelgleichung lautet dann $y^2 - x^2 = a^2$ mit dem Zahlenpaar $(14, a + 10)$ als Lösung. Daraus folgt $(a + 10)^2 - 14^2 = a^2 \Rightarrow a^2 + 20a + 100 - 196 = a^2 \Rightarrow 20a = 96 \Rightarrow a = 4{,}8$. Aus der obigen Formel ergibt sich $V_{H2} = \pi \cdot \left(\frac{1000}{3} + 4{,}8 \cdot 100\right) = \pi \cdot \frac{1000 + 1440}{3} \approx$ 2555 cm^3.