DREI BEISPIELE ZUM "NEUEN TYP" DER DG-AUFGABE *)

von

Dieter GRILLMAYER , Steyr

Anläßlich des Seminars vom Mai 1990 in Seggauberg stellte ich den "Aschenbecher" als ein Beispiel vor, das die Bedingungen einer DG-Aufgabe "neuen Typs" wohl recht gut erfüllt. Als solche wurden in ausführlicher Diskussion erarbeitet und festgelegt:

1. Schüler sollen sich anhand solcher Aufgaben mit räumlicher Geometrie auseinandersetzen, sollen räumlich "denken" lernen, und zwar über den (für die Festigung und Einübung von Wissen und Können notwendigen) "Routinebetrieb" hinaus.
2. Diese Aufgaben sollen vor allem dazu dienen, geometrische Probleme zu diskutieren und zu lösen. Sie müssen daher nicht unbedingt "praxisorientiert" sein.
3. Es ist didaktisch günstig, wenn in einer solchen Aufgabe Bewegung oder Formänderung stattfindet ("kinetisches Prinzip").
4. Aus einer Aufgabe sollen möglichst weitere, ähnliche Aufgaben abgeleitet werden können, und es ist wünschenswert, wenn sich die Aufgabe dazu eignet, verschiedene Darstellungsmethoden daran zu üben. Dabei sollen die Schüler auch lernen, selbständig geeignete Annahmen zu treffen.

Ziel sollte sein, von einem DG-Unterricht wegzukommen, in dem die Schüler nur nachvollziehen, denn für die Mehrheit der AHS-Schüler geht es nicht um einen möglichst klaglosen Einstieg in die Hochschul-DG, sondern um formale Bildungsziele (räumlich denken lernen, Probleme lösen, Selbständigkeit, Kreativität). Das in den beiden letzten Jahrzehnten forcierte Zeichnen "schöner Bilder" hat zu einer gewissen inhaltlichen Verarmung der Schul-DG geführt und sollte zugunsten von mehr Auseinandersetzung mit dem Raum wieder etwas zurückgenommen werden.

Für ein Referat, das ich im November 1990 vor den oberösterr. DG-Lehrern zu diesem Thema zu halten hatte, wollte ich die oben angeführte Theorie mit einigen praktischen Beispielen untermauern. So arbeitete ich den "Aschenbecher" zu einer Aufgabengruppe aus und "erfand" mit dem "Medizinball" und dem "Archimedischen Körper" zwei weitere Beispiele für den "neuen Typ" der DG-Aufgabe.

Es ist kein Zufall, daß allen drei Beispielen konkrete, durch Photos vorgestellte, Objekte zugrunde liegen. Ich bin dabei von den Intenionen des Kollegen DOPLER beeinflußt, der Photos als Motivation und Einstieg zum Zeichnen "schöner Bilder" verwendet. Wie sich zeigt, kann man auf diesem Weg auch zu Aufgaben "neuen Typs" gelangen. Auf meinem Schreibtisch liegen noch mehrere Photos herum, die darauf warten, zu solchen Aufgaben verarbeitet zu werden.

Zuletzt ein Vorschlag zur praktischen Umsetzung im Unterricht: Günstig wäre es, jede Aufgabe dieser Art auf einem Blatt zu erfassen, auf dem das Problem vorgestellt wird und das auch Lösungshinweise und verschiedene konkrete Aufträge enthält (siehe die folgenden Ausarbeitungen). An geeigneter Stelle können dann solche Blätter im Unterricht ausgeteilt und die Schüler zur Beschäftigung damit angehalten werden (Partner-oder Gruppenarbeit, Projektarbeit, Programm usw.).

EIN ASCHENBECHER ZUM AUF- UND ZUMACHEN

Eine Kugel (Mittelpunkt M, Radius r) wird mit zwei Ebenen geschnitten (Abb.1):

1. Eine waagrechte Ebene (Π_1) schneidet von der Kugel ein Segment ab ($\overline{M\Pi_1} = h$). Der auf Π_1 stehende Restkörper ist hohl.
2. Eine zweite Ebene ε schneidet von dem Hohlkörper eine Kalotte ab ($\overline{M\varepsilon}=d, \sphericalangle\Pi_1\varepsilon=\alpha$); Schnittkreis k.

Das beschriebene und durch Abb.1 veranschaulichte Objekt ist die Grundform eines Aschenbechers,

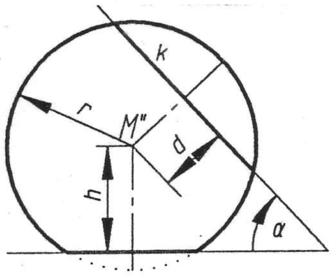


Abb.1

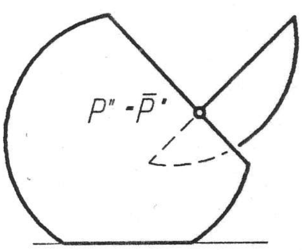


Abb.2

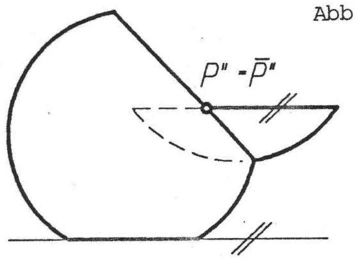


Abb.3

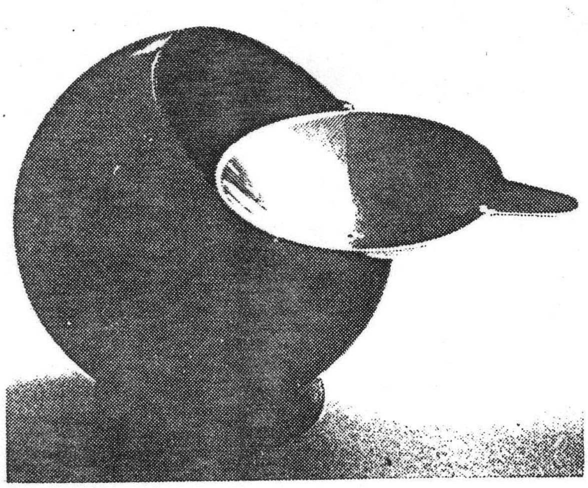


Abb.4

*) Mit freundlicher Genehmigung des Herausgebers, o.Univ.-Prof.Mag.Dr.Hans SACHS, abgedruckt aus dem Bericht des im Mai 1990 in Seggauberg abgehaltenen Seminars "Zeitgemäße DG-Aufgaben".

wobei die Kalotte um zwei Punkte P, $\overline{P}$ des Schnittkreises drehbar ist(Abb.2).Die Drehung ist bis zu einer Lage gemäß Abb.3 möglich, bei welcher die Kalotte auf dem zwischen den Punkten P, $\overline{P}$ liegenden Teil des Schnittkreise auf-liegt und der Randkreis der Kalotte waagrecht ist.

Bei der Herstellung (und Darstellung) des Aschenbechers besteht das Problem vor allem darin,die Lage der Punkt P, $\overline{P}$ zu bestimmen. Man beachte: Die gedrehte Kalotte (mit waagrechtem Randkreis) gehört einer Kugel an, von welcher der Radius bekannt ist und auf der auch der Schnittkreis k liegt.

Aufgaben:

1. Gegeben sind r, h, α und d; die Ebene ε ist zweitprojizierend und fällt von links oben nach rechts unten. Man stelle die Grundform des Aschenbechers in geöffnetem Zustand(mit waagrechtem Randkreis) in Grund-, Auf und Kreuzriß (Ansicht von rechts) dar!

1.1 $r = 4$ cm, $h = 3$ cm, $\alpha = 45^0$, $d = 1,5$ cm.

1.2 $r = 4$ cm, $h = 3$ cm, $\alpha = 6o^0$, $d = 2$ cm.

2. Das beschriebene Objekt (Grundform mit $r = 5$ cm und $\alpha = 45^0$) wird um eine lotrechte Achse durch M um den Winkel δ gedreht. Grund-und Aufriß des gedrehten Objekts(in geöffn.Zustand)!

2.1 $h = 4$ cm, $d = 2,5$ cm, $\delta = -3o^0$

2.2 $h = 3,5$ cm, $d = 2$ cm, $\delta = -45^0$

3. Das beschriebene Objekt mit den Maßen von Aufgabe 2.2 ist in normaler Axonometrie darzustellen, wobei die Annahme so zu treffen ist, daß ein Bild ähnlich Abb.4(Photo des Aschenbechers, nach dem dieses Beispiel konzipiert ist)entsteht.

3.1 Grundform.

3.2 Detaillierte Form (Abb.4): Standfläche=Kreisscheibe, Zigarettenauflage drehzylinderförmig.

DER MEDIZINBALL

Die Oberfläche ("Haut") eines Medizinballes (Abb.1) besteht aus n kongruenten Teilstücken. Bei der Herstellung eines solchen Balles werden n Lederstücke gleicher Form und Größe aneinandergenäht und es entsteht zunächst ein Objekt("Grundkörper"), das von Zylinderflächen begrenzt wird; diese sind durch Nahtkanten miteinander verbunden. Erst beim Füllen des Balles ensteht durch Dehnung des Leders eine Kugel, die n Teilstücke der Oberfläche sind dann sphärische Zweiecke (Abb.1).
Geht man von Drehzylinderflächen aus, dann sind die Nahtkurven des Grundkörpers Ellipsen bzw. Halbellipsen; die Darstellung des Grundkörpers und die Verebnung der Teilstücke ist in diesem Fall ein Anwendungsbeispiel für Drehzylinderschnitte. Sollen die Nahtkurven (wie beim Endprodukt) Kreise bzw. Halbkreise sein, dann hat man ein Anwendungsbeispiel für schiefe Kreiszylinder (und deren Verebnung).

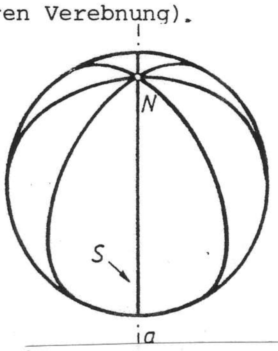


Abb.1

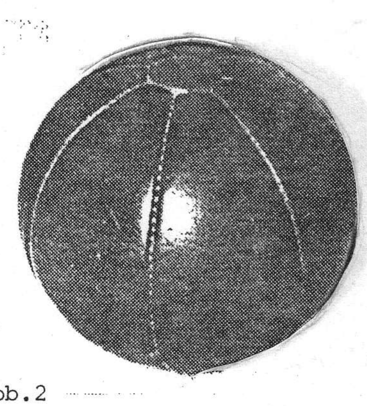
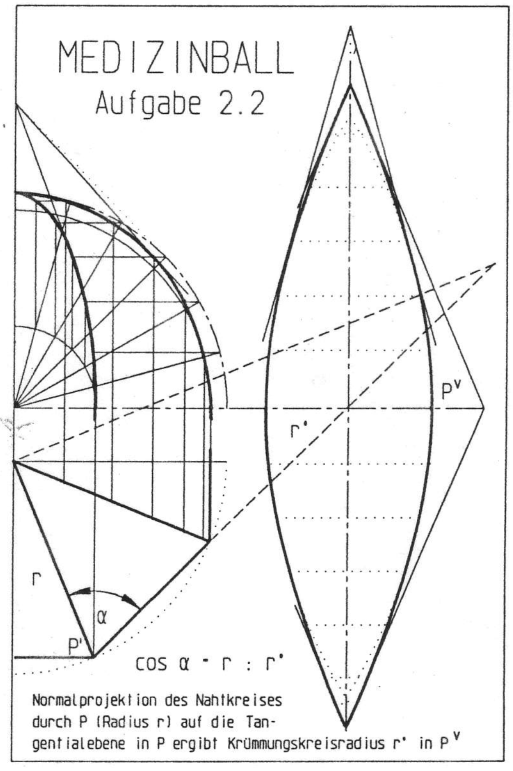


Abb.2



Aufgaben:

1. Grund- und Aufriß des von Zylinderflächen begrenzten Grundkörpers mit lotrechter Achse a = (NS), und zwar:

1.1 Für n=8,wobei die 8 kongruenten Teilstücke paarweise auf vier Drehzylinderflächen von je 16 cm Radius liegen sollen, im Maßstab 1:4.

1.11 Der zweite (scheinbare) Umriß soll ein Kreis sein.

1.12 Der zweite(scheinbare)Umriß soll eine Ellipse mit möglichst langer Achsenstrecke AB sein.

1.2 Für n = 7 (Abb.2),wobei diekongruenten Teile auf 7 Drehzylinderflächen von je 2o cm Radius liegen sollen und der zweite (scheinbare)Umriß aus einem Halbkreis und aus einer Halbellipse besteht (M 1:4).

1.3 Für n = 8,wobei die 8 kongruenten Teilstücke paarweise auf vier Kreiszylinderflächen liegen sollen und die vier Nahtkurven Kreise von je 16 cm Radius sind (M 1:4)

1.31 Die Aufrisse der vier Kreise fallen paarweise zusammen.

1.32 Einer der Nahtkreise hat zweite Hauptlage.

2. Verebnung eines Teilstücks der "Haut":

2.1 Nach der Angabe von Aufgabe 1.11, aber im Maßstab 1 : 2

2.2 Nach der Angabe von Aufgabe 1.31, aber im Maßstab 1 : 2

3. Auf- und Kreuzriß des von Zylinderflächen begrenzten Grundkörpers,wobei die Achse a =(NS) dritte Hauptlage mit vorne oben liegendem N und $\sphericalangle a\Pi_1=60^o$ haben soll, und zwar:

3.1 Für n = 8, wobei die 8 kongruenten Teilstücke paarweise auf vier Drehzylinderflächen von je 25 cm Radius liegen sollen, im Maßstab 1:5.

3.11 Der dritte (scheinbare) Umriß soll ein Kreis sein.

3.12 Der dritte(scheinbare)Umriß soll eine Ellipse mit möglichst langer Achsenstrecke AB sein.

3.2 Für n = 7, wobei die 7 kongruenten Teilstücke auf 7 Drehzylinderflächen von je 25 cm Radius liegen sollen und der dritte (scheinbare) Umriß aus einem Halbkreis und einer Halbellipse besteht, im Maßstab 1:5.

4. Axonometrisches Bild des von 8 Teilstücken begrenzten Grundkörpers,die paarweise auf vier Drehzylinderflächen von je 3o cm Radius liegen sollen, im Maßstab 1:5.Zwei der vier Drehzylinderflächen haben Achsen x und y.

4.1 Kavalierriß (Frontalriß)

4.2 Militärriß (Horizontalriß)

4.3 Allgemeine Axonometrie nach eigener Annahme

Kommentar:

Der geometrische Sachverhalt ließe sich natürlich auch anhand anderer Objekte (z.B. anhand von Turmhelmen) abhandeln. Motivation für diesen Ansatz war der konkret vorhandene "siebenteilige" Medizinball auf der (auf reiner geometr.Theorie beruhende) Rückschluß vom kugeligen Endprodukt auf den "Grundkörper".

Aufg.1 ist konstruktiv sehr einfach, der Bildungswert steckt in den vorher anzustellenden räumlichen Überlegungen. Aufg.2 ist eine sich hier geradezu aufdrängende Anwendung für Verebnungen samt Tangenten- und Krümmungskreisüberlegungen (siehe nebenstehende Ausarbeitung). Aufg.3(insbes. 3.2) ist bereits recht aufwendig. Wie auch bei Aufg.4 ist hier vor allem das Ermitteln der Umrißstrecken interessant (etwa als Ell.tangenten von geg.Richtung).

EIN ARCHIMEDISCHER KÖRPER

Abb.1 zeigt einen Beleuchtungskörper, der als Durchdringung (Verschneidung)eines von 18 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzten archimedischen Körpers mit einem Drehkegelstumpf gedeutet werden kann. Je acht quadratische Begrenzungsflächen dieses archimedischen Körpers hängen so aneinander wie die Seitenflächen eines regelmäßigen achtseitigen Prismas , wie man in Abb.1 etwa an jenen acht Flächen erkennt, die vom Drehkegelmantal geschnitten werden.

Aufgaben:

1. Aus einem Würfel (Kantenlänge a) ist der archimedische Körper so zu entwickeln, daß sechs seiner quadratischen Begrenzungsflächen in den Begrenzungsflächen des Würfels liegen. Für die Darstellung gemäß 1.1 bis 1.4 ist von einem Würfel mit achsenparallelen Kanten auszugehen. Für die Darstellung ist die Achteckskonstruktion gemäß Abb.2 nützlich.

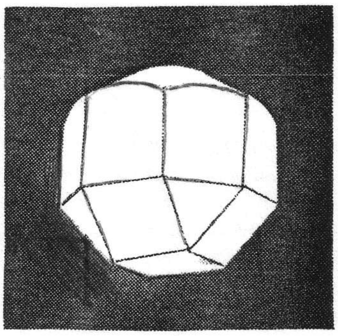


Abb.1

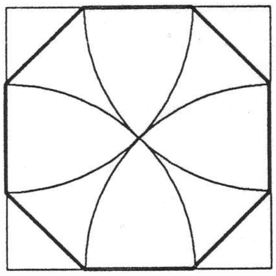


Abb.2

1.1 a = 5 cm, Grund- und Aufriß.

1.2 a = 8 cm, Militärriß: $\sphericalangle z^s x^s = 120^\circ$, $v_x = 0{,}4$.

1.3 a = 8 cm, Kavalierriß: $\varphi = \sphericalangle x^s y^s = 195^\circ$, $v_x = 0{,}6$.

1.4 a = 8 cm, allgemeine Axonometrie: $\sphericalangle z^p x^p = 250^\circ$, $\sphericalangle x^p y^p = 210^\circ$, $s_x : s_y : s_z = 5:6:7$.

2. Es ist ein Netz des archimedischen Körpers mit der Kantenlänge k = 2,5 cm zu zeichnen.

3. Es ist ein Modell des archimedischen Körpers anzufertigen und durch 130-maliges "Würfeln" folgende Hypothese zu überprüfen: "Die Wahrscheinlichkeit, daß der Körper auf einer quadratischen Begrenzungsfläche liegen bleibt, ist größer als 9/13." (Warum gerade 9/13?).

4. Beleuchtungskörper gemäß Abb.1, wobei ein Prallelkreis der Drehkegelfläche der Inkreis des oberen (horizontalen) Achtecks ist:

4.1 Darstellung in Grund- und Aufriß, gedrehte Lage ($\delta = 30^\circ$).

4.2 Darstelleung in einer Axonometrie nach eigener Annahme.

5. Es soll ein Beleuchtungskörper entwickelt werden, bei dem der obere Teil nicht kegelförmig, sondern kugelförmig ist. Die an der Durchdringung beteiligte Kugel schneidet alle Kanten des archimedischen Körpers in deren Halbierungspunkten.

5.1 Darstellung in Grund- und Aufriß, gedrehte Lage ($\delta = 30^\circ$).

5.2 Darstellung in normaler Axonometrie nach eigener Annahme.

Kommentar:

In Aufg.1 geht es zunächst darum, eine Vorstellung von der geometrischen Struktur des (vollständigen archim.Körpers zu gewinnen; die Darstellung ist dann recht einfach.Aufg.3 soll zum Nachdenken über das "Würfelproblem" anregen. Ergebnis könnte sein, wie ein Körper beschaffen sein muß, bei dem jede Lage "gleichwahrscheinlich" ist.Ist das Rhombendodekaeder ein solcher Körper?