Die Darstellende Geometrie als Problemlöser

Einleitung

Wie ihr Name angibt, beschäftigt sich die Darstellende Geometrie (im folgenden mit DG abgekürzt) vor allem mit dem Darstellen räumlicher, also dreidimensionaler Objekte durch eine (zweidimensionale) Zeichnung. Es ist das Kernproblem der DG, den Verlust einer Dimension ohne Verlust an Anschaulichkeit oder Maßtreue zu bewältigen. Maßtreue bedeutet, daß die wahren Abmessungen des Objekts aus der Zeichnung erkennbar sind. Eine sowohl anschauliche als auch maßgetreue Wiedergabe des Objekts ist nur durch ein räumliches Modell, nicht aber durch eine Zeichnung möglich.

Der Unterricht der DG hat vornehmlich das Erarbeiten der geometrischen Grundlagen, das Darstellen von Objekten sowie das „Lesen" vorgegebener Zeichnungen zum Inhalt. Das „Lesen" ist die Umkehrung des Darstellens; der Wert dieser Fähigkeit wird gerne unterschätzt. Aber sollte ein Gebildeter nicht im Raum ebenso Bescheid wissen wie in der Zeit (Geschichte), sollte er nicht eine Zeichnung ebenso verstehen können wie einen Text?

Durch den Einsatz computergesteuerter Zeichengeräte, sogenannter Plotter, dürfte im Anwendungsbereich der DG das zeichnerische Element, soweit es nur das Darstellen von Objekten betrifft, etwas zurücktreten. Fig. 1 zeigt einen Teil eines Ringtorus, der von einem Plotter gezeichnet wurde. Wo aber die Mechanik gegenüber der Denkarbeit in den Hintergrund tritt, da bleibt der Mensch der Maschine überlegen. In diesem Zusammenhang darf darauf hingewiesen werden, daß es mit den Methoden der DG oft möglich ist, Probleme mit wenigen Linien zeichnerisch zu lösen, die anders, wenn überhaupt, nur durch umständliches Probieren oder durch langwierige Rechnungen zu bewältigen sind. Im folgenden soll dieser Aspekt der DG an drei einfachen Beispielen aufgezeigt werden.[1]

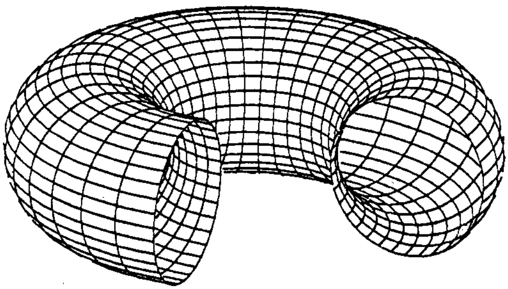

Fig. 1

---

1) Das Thema war Inhalt eines Forbildungsseminars für DG-Professoren, das Herr Univ.-Prof. Dr. Hellmuth STACHEL von 22. — 26. 11. 1982 abgehalten hat und dem diese Beispiele entnommen sind.

Drei verschiedenartige Probleme

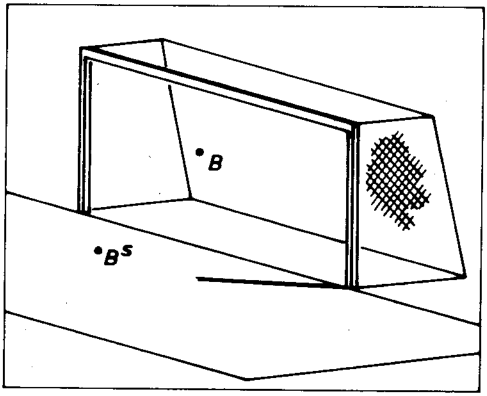

Fig. 2

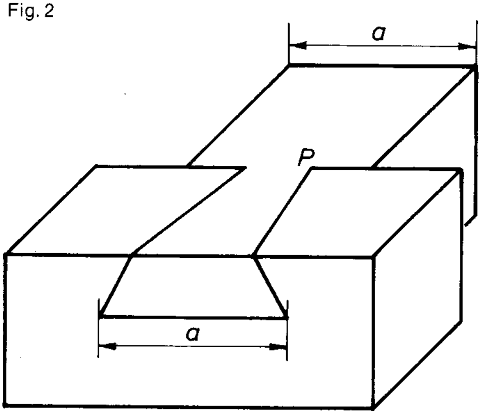

Fig. 3

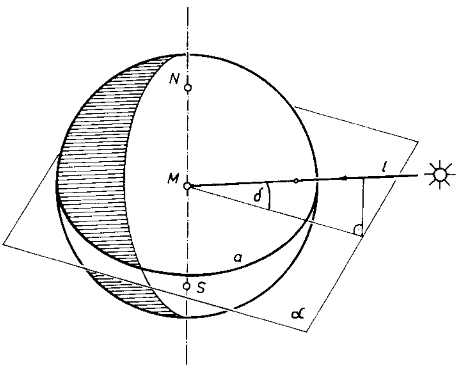

Fig. 4

Aufgabe 1: Fig. 2 ist ein Parallelriß und soll als Näherung für ein aus großer Entfernung mit einem starken Teleobjektiv aufgenommenes Photo dienen. Das Bild zeigt ein Fußballtor, den Ball B, seinen Schatten B^s, den Schatten einer Torstange und einen Teil der Torraumgrenze, deren zur Torlinie parallele Seite von dieser einen Abstand von 5,5 Metern hat.

a) Ist der Ball vor oder hinter der Torlinie?
b) Um wieviel cm ist der Ball vor oder hinter der Torlinie?

Aufgabe 2: Fig. 3 zeigt eine Holzverbindung. Die Gleitfläche zwischen den beiden Teilen besteht aus drei Ebenenstücken, die Stoßfläche (hinten) ist lotrecht, also zu den Tiefkanten normal. Welche Gestalt haben die beiden Teile der Holzverbindung?

Aufgabe 3: Am 21. Juni ist die Sonnendeklination δ, das ist der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen gegen die Äquatorebene, am größten: $\delta = 23{,}4°$ (Fig. 4).

a) Wo geht die Sonne am 21. Juni früher auf, in Wien (16°O/48°N) oder in Oslo (11°O/60°N)?
b) Um wieviel Minuten geht die Sonne in dem einen Ort früher auf als in dem anderen?

Diese drei Aufgaben werden zunächst ohne Lösung vorgestellt, um es interessierten Lesern zu ermöglichen, diese Probleme selbständig zu bewältigen. Es werden dazu keinerlei Kenntnisse gebraucht, die über den Lehrstoff des Geometrischen Zeichnens (3. und 4. Klasse) hinausgehen; bei Aufgabe 3 muß man allerdings auch über geographische Koordinaten und ihre Übertragung auf einen in Grund- und Aufriß gegebenen Globus Bescheid wissen. Maßbestimmungen können durch eine Zeichnung natürlich nur näherungsweise im Rahmen der Zeichen- und Ablesegenauigkeit erfolgen.

Diese drei Probleme sollen aber auch die Vielfalt der Sachgebiete veranschaulichen, in denen Darstellende Geometrie wirksam zu werden vermag. In der Physik, der Chemie, der Geographie, um nur einige Bereiche zu nennen, gibt es zahlreiche Möglichkeiten, geometrisches Wissen und Können sinnvoll einzusetzen. Nicht umsonst hat E. COLERUS sein Buch „Vom Punkt zur vierten Dimension" mit der Kapitelüberschrift „Die ganze Welt ist Geometrie" eingeleitet.

Ist der Ball im Tor oder nicht?

Zur Lösung von Aufgabe 1a (Fig. 5): Der Ball B ist vor oder hinter der Torlinie, je nachdem ein lotrechter, durch B führender Stab das Spielfeld vor oder hinter der Torlinie trifft; der Fußpunkt des Stabes ist B', der Grundriß von B, sofern das Spielfeld als waagrechte Bildebene π_1 angenommen wird. Der Schatten des Stabes geht von B' aus und führt zu B^s. Da die durch Sonnenlicht erzeugten Schatten von parallelen Strecken wieder parallel sind („Parallelentreue" der Parallelprojektion), muß die Strecke B^sB' zum Schatten der Torstange parallel sein. B' liegt daher im Schnitt der lotrechten Geraden durch B und der zum Schatten der Torstange parallelen Geraden durch B^s. Die Zeichnung zeigt nun, daß der Ball zum Zeitpunkt der Aufnahme dieses Photos noch nicht im Tor ist.

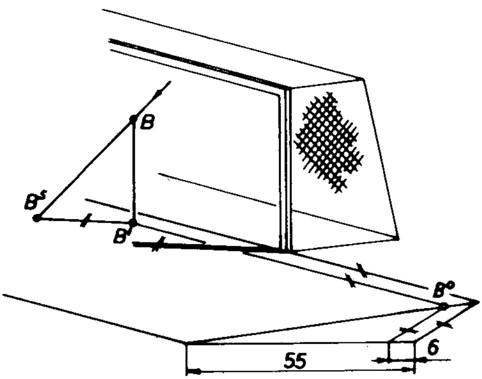

Fig. 5

Zur Lösung von Aufgabe 1b (Fig. 5): Es wird die geometrische Eigenschaft der „Teilverhältnistreue" der Parallelprojektion benützt. Legt man durch B' eine Parallele zur Torlinie, so schneidet diese die rechte, 5,5 Meter lange Torraumgrenze in einem Punkt B^o, dessen Abstand von der Torlinie der gesuchte ist. Man mißt diesen Abstand mittels einer 55 mm langen Hilfsstrecke, auf die das Teilverhältnis, das der Punkt B^o auf der rechten Torraumgrenze bestimmt, nach dem Strahlensatz übertragen wird. Den Längen auf der Hilfsstrecke entsprechen nun die wahren Längen im Maßstab 1 : 100. Wir messen etwa 6 mm, der Ball ist also zum Zeitpunkt der Aufnahme noch ungefähr 60 cm vor dem Tor.

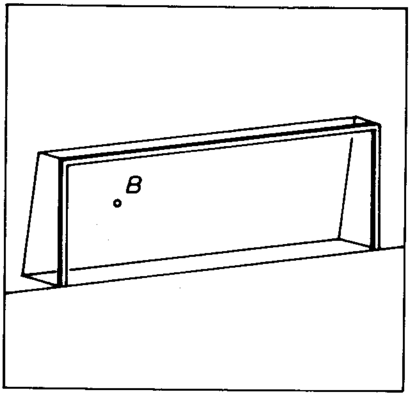

Fig. 6a

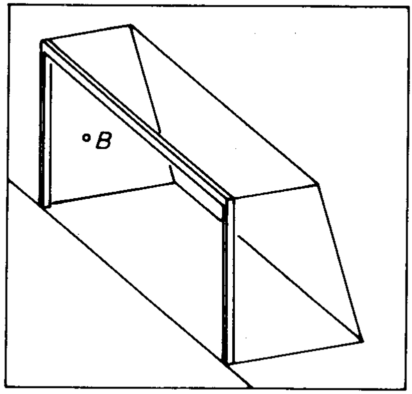

Fig. 6b

Wem die Beschäftigung mit solchen Problemen Spaß macht, dem wird die folgende, durch Teilverhältnisübertragung zu bewältigende Aufgabe ohne Lösung angeboten: Fig. 6a, 6b zeigen zwei zur selben Zeit aufgenommene Photos, wieder durch zwei Parallelrisse angenähert. Ist der Ball zum Zeitpunkt der Aufnahme vor oder hinter der Torlinie?

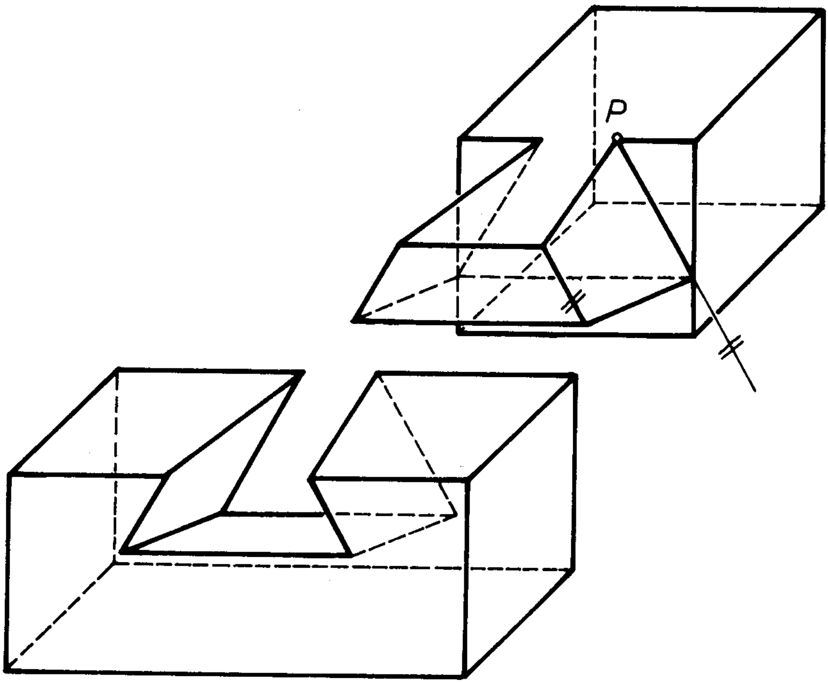

Fig. 7

Wie funktioniert diese Holzverbindung?

Zur Lösung von Aufgabe 2 (Fig. 7): Wir zeichnen zunächst nur jene Begrenzungsflächen des Zapfens, die in Fig. 3 sichtbar sind, sowie den anschließenden Quader. Die Schnittkante zwischen der rechten Gleitfläche (am Zapfen) und der Stoßfläche (am Quader) muß in beiden Flächen liegen und vom Punkt P ausgehen; sie muß daher zur Vorderkante der Gleitfläche parallel sein. Denn alle anderen durch P gehenden und in der Stoßfläche liegenden Strecken sind zu dieser Vorderkante windschief und können somit nicht der Gleitfläche angehören.[1] Die Figur läßt sich nun leicht vervollständigen, und auch die zum Zapfen passende Ausnehmung im anderen Teil der Holzverbindung ist damit bestimmt.

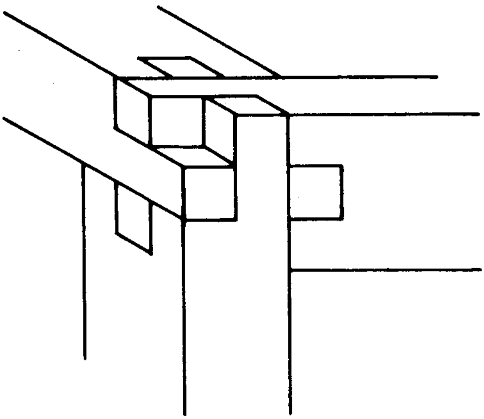

Fig. 8

Auch im Anschluß an diese Aufgabe ein Beispiel zum Selbermachen: Stelle die drei (kongruenten) Teile der durch Fig. 8 gegebenen Holzverbindung einzeln dar!

Wo geht die Sonne früher auf, in Wien oder in Oslo?

Zur Lösung von Aufgabe 3a (Fig. 9): Es genügt, das vordere nördliche Viertel eines Globus von beliebigem Radius in Grund- und Aufriß darzustellen, wie es Fig. 9 zeigt. Darauf wird nun die Schattengrenze k am 21. 6. als zweitprojizierender Kreis eingezeichnet; die Kreisachse l zielt zur Sonne, schließt also mit der Äquatorebene α den Winkel $\delta = 23{,}4°$ ein. Bei feststehender Sonne bleibt der Schattenkreis konstant, wenn sich die Erde um ihre Achse a dreht. Man erkennt daraus leicht die Bedeutung des nördlichen Polarkreises p (66,6° N): Auf der von ihm begrenzten Nordkalotte scheint am 21. 6. die Sonne 24 Stunden lang.

Mit Hilfe der geographischen Breite von Wien können wir nun einen Punkt W auf dem Globus so einzeichnen, daß er auf der Schattengrenze k liegt. Die Zeichnung zeigt nun die Erde zu dem Zeitpunkt, zu dem am 21. 6. in Wien die Sonne aufgeht. Die im unteren Halbkreis liegende, von N' ausgehende Strecke durch W' ist damit der Grundriß des 16° O-Meridians. Nun kann auch der 11° O-Meridian und mit Hilfe des 60° N-Breitenkreises der Punkt O (Oslo) in Grund- und Aufriß gezeichnet werden. O liegt auf der

1) Die Lösung der Aufgabe beruht also auf dem Satz, daß sich durch zwei zueinander windschiefe Gerade keine Ebene legen läßt.

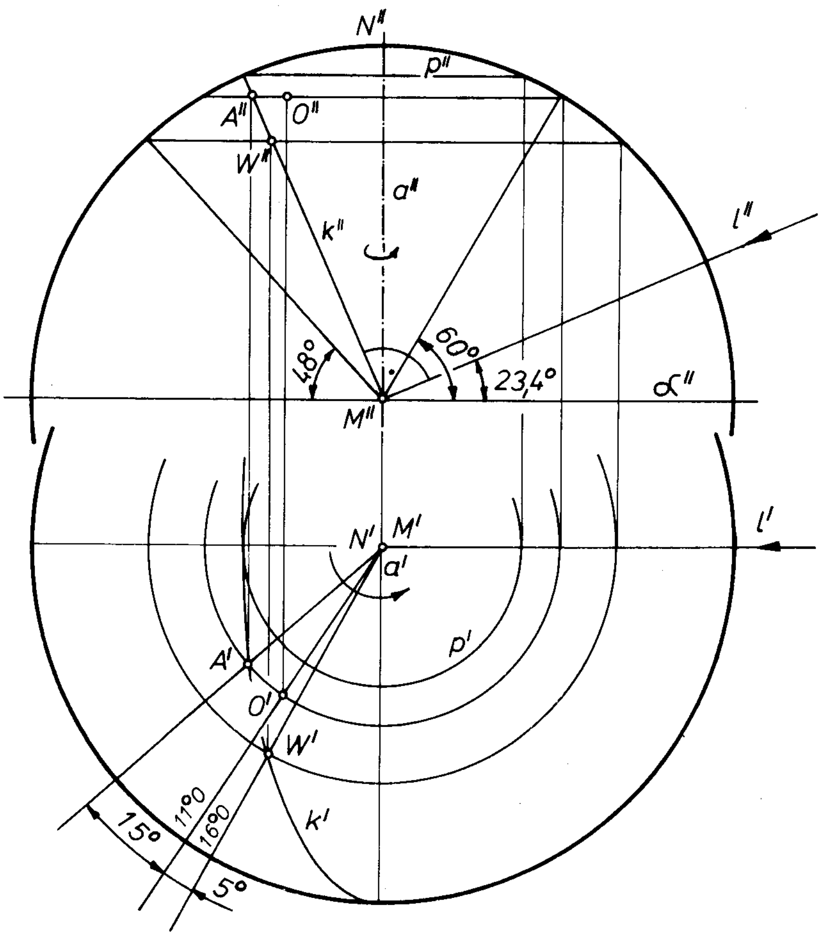

Fig. 9

beleuchteten Hälfte des Globus, die Sonne geht also am 21. 6. in Oslo früher auf als in Wien.

Zur Lösung von Aufgabe 3b (Fig. 9): Um die Zeitspanne zu bestimmen, die zwischen dem Sonnenaufgang in Oslo und in Wien liegt, ermitteln wir Grund- und Aufriß des Punktes A auf dem 60° N-Breitenkreis, in dem die Sonne am 21. 6. zur selben Zeit aufgeht wie in Wien. A hat, wie der Grundriß zeigt, eine geographische Länge, die von der geographischen Länge Oslos um etwa 15° differiert. Die volle Drehung um 360° erfolgt in 24 Stunden; daraus ergibt sich für die 1°-Drehung ein Zeitraum von 4 Minuten und für die 15°-Drehung ein Zeitraum von einer Stunde. Die Sonne geht also in Oslo am 21. 6. um etwa eine Stunde früher auf als in Wien.

Ähnliche Aufgaben können selbständig zusammengestellt und gelöst werden, sofern die Deklination δ des betreffenden Datums bekannt ist.

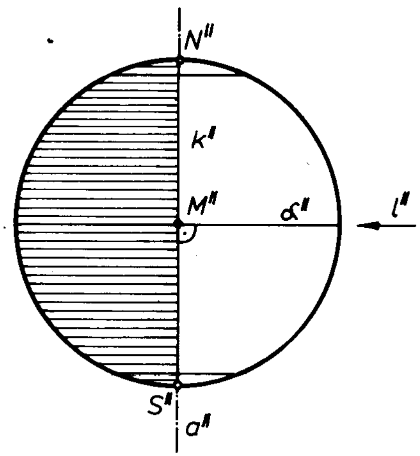

Fig. 10a

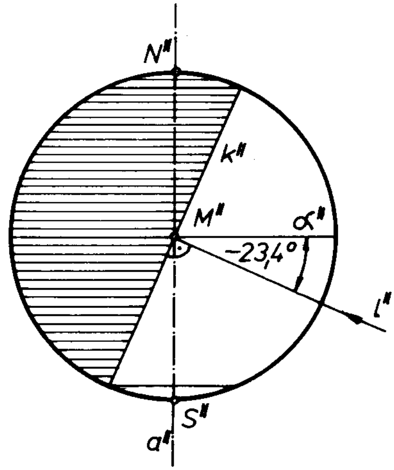

Fig. 10b

δ nimmt von 21. 6. (Sommersonnenwende) an ständig, aber nicht linear ab, erreicht am 23. 9. (Herbstanfang) einen Wert von 0° (Fig. 10a) und am 21. 12. (Wintersonnenwende) das Minimum von —23,4° (Fig. 10b). Dann nimmt die Deklination δ wieder zu, überschreitet am 21. 3. (Frühlingsanfang) die 0°-Grenze und erreicht am 21. 6. wieder das Maximum von 23,4°. Fig. 10a zeigt, warum am 23. 9. und 21. 3. überall auf der Erde (außer in den Polen) 12 Stunden lang die Sonne scheint und 12 Stunden lang Nacht ist. In den Polen wandert die Sonne an diesen Tagen (Äquinoktien) 24 Stunden lang am Horizont entlang. Aus Fig. 10b ist zu erkennen, warum am 21. 12. die Nordkalotte 24 Stunden lang im Schatten liegt, während auf der Südkalotte (Antarktis) 24 Stunden lang die Sonne scheint.

Dieter Grillmayer