Da ich schräg nach oben fotografiert hatte war die Projektionsebene bei dieser Aufnahme nicht lotrecht, aber offenbar zu den vorderen und hinteren Leinenabschnitten parallel, weil deren Bilder untereinander parallel sind. Stutzig gemacht hat mich, dass die Bilder der linken und rechten Leinenabschnitte auf zwei verschiedene Fluchtpunkte zulaufen, sodass also diese Strecken im Raum nicht parallel sein können. Jetzt erst habe ich die Bespannung vermessen, was beim äußersten Leinenviereck Längen von (annähernd) 1,2 m vorne, 1,8 m hinten sowie je 2,2 m links und rechts ergab, also ein gleichschenkliges Trapez von ca. 7,4 m Umfang.

Daraufhin bin ich die Sache in einem zweiten Versuch anders angegangen: Nach dem Entfernen der ganzen wenig professionellen Bespannung habe ich mit einem äußeren Quadrat von ca. 1,9 m Seitenlänge, also ungefähr 7,6 m Umfang, die Streben eingerichtet, um dann wieder von innen nach außen zu arbeiten, was letztlich zu einem (mich) befriedigenden Ergebnis geführt hat.

Das Ganze wirft zwei Fragen auf, nämlich erstens, was für Vierecke bei einem (ausgeleierten) Gestänge möglich sind, und zweitens, ob die quadratische Form wirklich die mit dem größten Umfang ist, wie es den Anschein hat.

Eine abstrakt geometrische Behandlung verlangt danach, den Träger als lotrechte Strecke, die vier Streben als gleich lange Strecken (Länge l) und auch die Leinenabschnitte als Strecken aufzufassen, wobei man sich auf das äußerste (größte) Viereck beschränken kann. (Die anderen Vierecke sind dazu ähnlich.) In einem Grundriss erscheint dann der Träger als Punkt M, von dem vier gleich lange Strecken MA, MB, MC und MD ausgehen. Sie haben die Länge $r = l.\cos\beta$, weil die vier Streben alle unter demselben Winkel β geböscht sind.

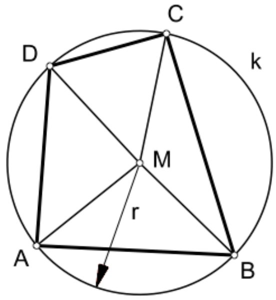

Abb. 3

Das Viereck ABCD (Abb. 3) gibt das äußerste Leinenviereck unverzerrt wieder, weil sich dieses ja in einer waagrechten Ebene befindet. Die erste Frage ist damit beantwortet, nämlich dass es sich nur um **Sehnenvierecke** handeln kann, in Spezialfällen also um gleichschenklige Trapeze, Rechtecke oder Quadrate. Die zweite Frage beantwortet dann der folgende Satz, den zu beweisen mir nur mit einem relativ großen Aufwand gelungen ist:

Satz: Das umfanggrößte Sehnenviereck, das einem Kreis k(M, r) eingeschrieben werden kann, ist das Quadrat.

Dass dieser Satz in dem abschließend genannten inkludiert ist bleibe vorläufig außer Betracht.

Mein Beweis setzt sich aus vier Schritten zusammen:

1. Eine jedem AHS-Maturanten zumutbare Extremwertaufgabe ist es, zu beweisen, dass unter allen Rechtecken mit der Diagonalenlänge 2r das Quadrat jenes mit dem größten Umfang ist.

2. Daraus ist dann leicht abzuleiten, dass das Quadrat unter allen Sehnenvierecken ABCD mit wenigstens einer durch den Kreismittelpunkt M gehenden Diagonalen AC (Abb. 4) den größtmöglichen Umfang hat.

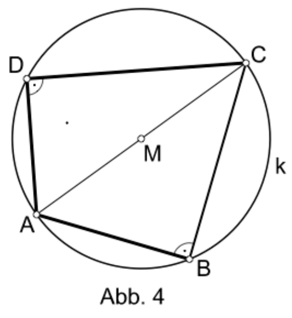

Abb. 4

Denn nach dem Satz von Thales hat so ein Viereck bei B und D zwei rechte Winkel, besteht also aus zwei halben Rechtecken. Nach Punkt 1 ist die Summe a + b mit a = $\overline{AB}$ und b = $\overline{BC}$ dann am größten, wenn a und b gleich lang sind, und so ist es auch mit c + d.

3. Der aufwändigste Teil besteht darin, zu beweisen, dass unter allen über einer Kreissehne BD zu errichtenden Dreiecken BCD mit C $\in$ k das gleichschenklige den größten Umfang hat. Ich habe das Problem recht „handwerklich“ mit Koordinaten [k: $x^2 + y^2 = r^2$, B(u/v), D(-u/v) und C(x/y)] als Extremwertaufgabe gelöst (Abb. 5). Dabei wird f(x) als Summe b + c von b = $\overline{BC}$ und c = $\overline{CD}$ gebildet und nachgewiesen, dass die erste Ableitung f '(x) bei x = 0 eine Nullstelle hat.

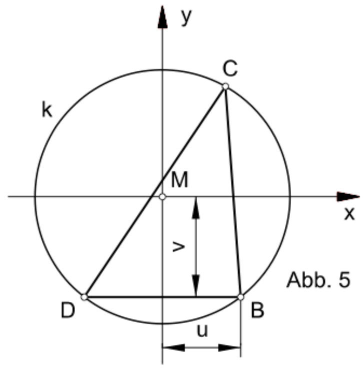

Abb. 5

Auf einen wesentlich „eleganteren“, weil rein geometrischen Beweis wurde ich von Herrn OStR. Mag. W. Nowak, der dankenswerterweise auch die Abb. 3 bis 7 gezeichnet hat, aufmerksam gemacht. Eine seiner Schülerinnen (Michaela Großbichler) hat diesen im Rahmen ihrer Maturavorbereitung am BRG Steyr im Schuljahr 1997/98 geführt. Er ist dem Buch „Extrema“ von Erhard Quaisser und Jürgen Sprengel (Verlag Harri Deutsch, 1986) entnommen:

Abb. 6 zeigt das Dreieck BCD mit seinem Umkreis k und (nach Peripheriewinkelsatz) konstantem Winkel γ bei C. In der Verlängerung der Strecke BC liegt der Punkt D’ so, dass BD’ = b + c und DCD’ ein gleichschenkliges Dreieck ist. In diesem sind wegen (180° – γ) + 2φ = 180° die beiden Basiswinkel φ halb so groß wie γ, sodass also, ebenfalls nach dem Peripheriewinkelsatz, der Punkt D’ auf einem Kreisbogen k’ mit dem Radius r’ über der Sehne BD liegen muss, dessen Mittelpunkt M’ der Scheitelpunkt des Kreises k ist. Unter allen von B ausgehenden Sehnen dieses Bogens hat die durch M’ gehende die maximale Länge, nämlich 2r’.

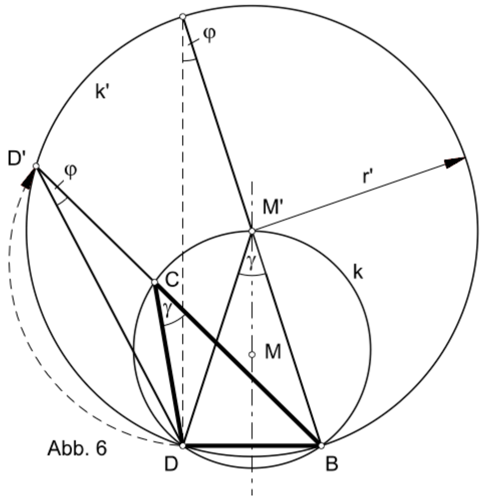

Abb. 6

Daher hat unter allen Dreiecken über BD das gleichschenklige Dreieck BM’D den größten Umfang.

4. Weil das Ergebnis von Punkt 3 natürlich auch auf das Dreieck DAB angewendet werden kann ist somit bewiesen, dass unter allen Sehnenvierecken ABCD mit der Kreissehne BD das deltoidförmige den größtmöglichen Umfang hat (Abb. 7). In ihm ist die Diagonale AC ein Kreisdurchmesser, sodass es in die Kategorie der bereits in Punkt 2 genannten Sehnenvierecke fällt, womit der Beweis abgeschlossen ist.

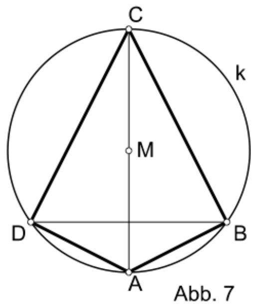

Abb. 7

Schlussbemerkung: Der bewiesene Satz ist der den Umfang betreffende Fall n = 4 jenes allgemeinen Satzes, der umso plausibler erscheint, je größer das n gewählt wird: **Unter allen einem Kreis k(M, r) einschreibbaren n-Ecken hat das regelmäßige den größten Umfang und den größten Flächeninhalt. Für n → ∞ strebt der Umfang dem Grenzwert 2rπ und der Flächeninhalt dem Grenzwert $r^2\pi$ zu.**